Ленинградская область

Региональный турнир по математике

Заочный тур

20 ноября - 20 декабря 2020 г.

1. *Числа и цифры*

   (a) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} S(x) + S(y) = x, \\ x + y + S(z) = z, \\ S(x) + S(y) + S(y) = y - 4, \end{cases}$$

   где x, y, z – натуральные числа, и $S(x)$, $S(y)$, $S(z)$ – число цифр в десятичной записи x, y, z соответственно.

   (b) Предложите свое обобщение задачи. Одно из возможных направлений – рассмотреть запись в системах счисления по другим основаниям.

2. *Оценка в правильном треугольнике*

   (a) Пусть O – внутренняя точка правильного треугольника ABC с длиной стороны a. Прямые OA, OB и OC пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что

$$|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| < a$$

   (b) Предложите свое обобщение задачи. Одно из возможных направлений – получить какие-нибудь оценки, используя похожие геометрические идеи.

3. *Наибольшее число набора*

   (a) Пусть $n \geq 2$ и $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ – вещественные числа такие, что $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Пусть $M = max(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$. Докажите, что

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

   и определите, в каком случае достигается равенство.

   (b) Предложите свое обобщение задачи.

4. *Функции целого аргумента*

   (a) Пусть $f(x)$ – функция, заданная на множестве неотрицательных целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и удовлетворяющая условиям

   $$f(2x) = 2f(x),\ f(4x+1) = 4f(x) + 3,\ f(4x-1) = 2f(2x-1) - 1$$

   Докажите, что если для некоторой пары аргументов $(x; y)$ выполняется $f(x) = f(y)$, то из этого следует, что $x = y$.

   (b) Предложите свое обобщение задачи. Одно из возможных направлений – рассмотреть другой набор условий на $f(x)$.

5. *Кубы и квадраты*

   (a) Разность двух целых чисел, являющихся кубами двух последовательных целых чисел, является числом n^2, где n – натуральное число. Докажите, что n представляется в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

   (b) Предложите свое обобщение задачи.

6. *Квадраты на плоскости*

   (a) Пусть A – набор конечного числа квадратов на целочисленной координатной плоскости $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, вершины этих квадратов имеют координаты $(m, n), (m+1, n), (m, n+1), (m+1, n+1)$ для некоторых целых m, n. Докажите, что существует такой набор B, входящий в набор A, и содержащий не менее $\frac{1}{4}$ числа квадратов в A, такой, что никакие два квадратоа из B не имеют общей вершины.

   (b) Предложите свое обобщение задачи.

- *Решения задач необходимо написать на бумаге, сканировать и отправить не позднее 20 декабря 2020 г на e-mail* konfint@yandex.ru

- *Вопросы по условиям задач можно задать по электронной почте по указанному выше адресу.*

- *Не предполагается, что все команды-участники турнира решат все задачи, тем не менее, чем больше задач выполнено, тем выше рейтинг команды. Имеет смысл отправить все решения, в которых имеется хотя бы частичное продвижение.*

- *Предложенные задачи требуют внимательного анализа условия, в этом смысле они рассматриваются как исследовательские. Для выполнения последнего пункта каждого задания необходимо рассмотреть еще какой-нибудь случай или предложить обобщающую формулировку, желательно, с последующим доказательством. Наличие обобщения задачи усиливает результат.*