

Ленинградская область
Региональный турнир по математике
Заочный тур
20 ноября - 25 декабря 2021 г.

1. *Простые числа*

- (a) Дано несколько натуральных чисел, больших единицы: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Построим последовательность $\{a_k\}$, такую, что ее первые n членов – это заданные числа, и каждый следующий член, начиная с a_{n+1} , – это наименьшее натуральное число, которое больше любого предыдущего члена последовательности, и которое не делится ни на один из предыдущих членов последовательности. Докажите, что начиная с какого-то члена, все члены получившейся последовательности являются простыми числами.
- (b) Можно ли получить таким образом все простые числа?
- (c) Можно ли утверждать, что начиная с некоторого числа a_p , в этой последовательности встретятся все простые числа, превосходящие a_p ?
- (d) Исследуйте набор простых чисел, встречающихся в последовательности, в зависимости от выбора первоначальных членов последовательности.

2. *Игра со степенями двойки*

- (a) Двое играют в такую игру. Задано некоторое число n . На первом шаге первый игрок выбирает $n + 1$ подмножество A_1, A_2, \dots, A_{n+1} из множества $\{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$, при этом каждое A_i содержит ровно 2^{n-1} элемент. На втором шаге второй игрок выбирает по своему желанию целые числа a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , всего $n + 1$ штук. На третьем шаге первый игрок выбирает целое число p . Второй игрок выигрывает, если существуют такие целые i и s , что $1 \leq i \leq n + 1$, $s \in A_i$, и $s + a_i = p \pmod{2^n}$. Если таких чисел не нашлось, выигрывшим считается первый игрок. Определите для каждого натурального n , кто из игроков выигрывает при правильной игре?
- (b) Как изменится ответ, если выбор числа p будет случайным?
- (c) Как изменится ответ, если число элементов во множествах A_i будет меняться от 1 до 2^n ? Рассмотрите различные варианты правил игры.

3. *Точки на окружности*

- (a) Пусть A, B, C, D – точки на окружности S , такие, что $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , при этом A лежит между B и E . Прямые BD и AC пересекаются в точке F . Точка X , отличная от точки D , – точка окружности S , такой, что DX и EF параллельны. Пусть точка Y симметрична точке D относительно прямой EF , и пусть точка Y лежит внутри окружности S . Докажите, что точки A, X, Y лежат на одной прямой.
- (b) Что можно сказать о положении этой прямой в зависимости от выбора точек A, B, C, D ?

4. Функция и ее композиции

- (a) Найдите все такие вещественные числа a , для которых существует функция $f(x)$, заданная на множестве вещественных чисел, такая, что выполняются два условия

$$f(f(x)) = f(x) + x, \text{ для всех вещественных } x$$

$$f(f(x) - x) = f(x) + ax, \text{ для всех вещественных } x$$

- (b) Можно ли продолжить дальше построение таких композиций, прибавляя члены со степенями x , большими, чем первая?

5. Целые выражения

- (a) Вещественные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 = 2c^2$ и $a \neq b, c \neq -a, c \neq -b$. Докажите, что

$$\frac{(a + b + 2c)(2a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b)(a + c)(b + c)}$$

является целым числом.

- (b) Постройте еще какое-либо нетривиальное дробно-рациональное выражение, которое является целым при всех вещественных значениях переменных, при которых оно определено.

6. Многоугольники с окрашенными вершинами

- (a) Пусть n – натуральное число, большее 2. Пусть $2n$ вершины правильного $(4n + 1)$ -угольника окрашены. Докажите, что существуют три окрашенные вершины, которые образуют равнобедренный треугольник.

- (b) Предложите свое обобщение задачи.

- Решения задач необходимо написать на бумаге, сканировать и отправить не позднее 19 декабря 2021 г. на e-mail konfint@yandex.ru
- Вопросы по условиям задач можно задать по электронной почте по указанному выше адресу.
- Не предполагается, что все команды-участники турнира решат все задачи, тем не менее, чем больше задач выполнено, тем выше рейтинг команды. Имеет смысл отправить все решения, в которых имеется хотя бы частичное продвижение.
- Предложенные задачи требуют внимательного анализа условия, в этом смысле они рассматриваются как исследовательские. Наличие обобщения задачи усиливает результат.