Матбой 1

1) Какое наименьшее число цифр имеет число, делящееся на 99, все цифры которого больше 4 и меньше 7?

   Ответ: 6

   Решение: Покажем, что пяти цифр не хватит. Цифры равны 5 или 6. Поскольку сумма всех цифр числа кратна 3, количество цифр 5 кратно 3 (в том числе 0). Теперь проверим делимость на 11 (в некоторых случаях для простоты обращаясь к делимости на 9).

   Для пяти цифр должно быть три «пятёрки» или ни одной. Случай с тремя «пятёрками»: для числа из одних «пятёрок» разность между суммой цифр на чётных местах и суммой цифр на нечётных местах будет равна 5. Поскольку две «пятёрки» заменим двумя «шестёрками», такая разность изменится не больше чем на 2, и не станет кратной 11. Если «пятёрок» нет, то число из пяти «шестёрок» не кратно 9.

   Для четырёх цифр должно быть три «пятёрки» и одна «шестёрка», или четыре «шестёрки». В обоих случаях число не кратно 9.

   Для трёх цифр получается три «пятёрки» (не делится на 9) или три «шестёрки» (не делится на 11).

   Для двух цифр число 66 не кратно 9.

   Для одной цифры число 6 не кратно 9.

   Осталось проверить, что пример для шести цифр строится — число из шести «шестёрок» делится на 9 и на 11.

2) Докажите, что для каждого натурального числа a найдется натуральное число b такое, что a и b взаимно просты, а число $a^3 + b^3$ имеет по крайней мере три простых делителя.

   Решение: Известно, что $a^3 + b^3$ делится на $a + b$. Нетрудно подобрать натуральное число N, большее a, взаимно простое с a и имеющее хотя бы три разных простых делителя (например, можно взять в качестве такого N произведение любых трех простых чисел, больших, чем a). Тогда $b = N - a$ также взаимно просто с a. Кроме того, $a^3 + b^3$ делится на N и, следовательно, имеет хотя бы три различных простых делителя.

3) На параде полк солдат численностью 2500 человек построился в квадрат 50 рядов, по 50 солдат в одном ряду. В каждом ряду самый высокий поднял красный флажок, или один из них, если самых высоких оказалось несколько солдат одного роста. В каждой колонне (стоящих друг за другом) самый низкий поднял зеленый флажок, или один из них, если самых низких оказалось несколько солдат одного роста. Все солдаты, которые подняли красный флажок, подняли и зеленый. Докажите, что все солдаты в полку одного роста.

Решение: Докажем сначала, что все солдаты, поднявшие флажки, имеют один рост. Пусть это не так. Тогда найдется пара солдат, поднявших флажки, A и B, про которых известно, что A выше B. В одной колонне с A и в одном ряду с B найдется солдат C. При этом C не ниже A (A поднял зеленый флажок, он самый низкий в колонне), но не выше B (B поднял красный флажок, он самый высокий в ряду). Значит, A не выше B. Противоречие.

Теперь рассмотрим произвольного солдата, не поднявшего флажок. Он не выше самого высокого в своем ряду, но не ниже самого низкого в своей колонне. Но самый низкий в этой колонне имеет такой же рост, как самый высокий в этом ряду. Значит, произвольный солдат имеет такой же рост, как и поднявшие флажки.

4) Можно ли выпуклый семиугольник разрезать на параллелограммы? *(П.Цишевич)*

   Ответ: Нельзя

   Решение: Допустим, что можно. Рассмотрим произвольный параллелограмм, примыкающий к стороне семиугольника. Его противоположная сторона либо примыкает к другой стороне семиугольника (а значит стороны параллельны), либо покрыта сторонами других параллелограммов. Во втором случае выберем один из них. Его противоположная сторона вновь либо примыкает к другой стороне семиугольника (а значит эта сторона параллельна начальной), либо покрыта сторонами других параллелограммов и т.д. Так как этот процесс не может продолжаться бесконечно, то получается что все стороны бьются на группы параллельных. Так как у семиугольника не может быть больше трех параллельных друг другу сторон, то разбиение на группы возможно только одно (3+2+2).

   Назовем наш семиугольник $ABCDEFG$. У него три стороны параллельны, не умаляя общности можно считать, что $AB \| CD \| EF$. Чтобы семиугольник был выпуклый необходимо, чтобы все его углы были $< 180°$. Так как $AB \| CD$, то $\angle ABC + \angle BCD = 180°$. Аналогично, $\angle CDE + \angle DEF = 180°$. Сумма углов во всем семиугольнике равна $900°$, значит $\angle EFG + \angle FGA + \angle GAB = 900° - 360° = 540°$. С другой стороны, если семиугольник выпуклый, то $\angle EFG + \angle FGA + \angle GAB < 180° \cdot 3 = 540$. Противоречие.

5) Произведение двух положительных чисел в 50 раз больше их суммы и в 75 раз больше. их разности. Найдите их сумму.

   Ответ: 360

   Решение: $ab = 50(a + b) = 75(a - b)$. Следовательно, $2(a + b) = 3(a - b)$;

   $2a + 2b = 3a - 3b \Rightarrow 5b = a$.

   Заменим число a числом $5b$:

   $5b \cdot b = 50(5b + b)$;

   $b = 60$;

   $a = 300$;

   $a + b = 360$.

6) В Ленинградской области прошли соревнования по теннису. Приняли участие 512 человек. Все игроки были разбиты на пары, проигравшие покидают соревнование, победители в каждой паре снова разбиваются на пары и играют между собой, и так далее, до финальной игры пары лучших теннисистов. Перед началом соревнований каждому теннисисту присвоили рейтинг от 1 до 512, по результатам прошлого года. Можно ли так составить распределение теннисистов на первоначальные пары, чтобы на протяжении всех соревнований разность рейтингов участников в каждой паре была бы не более 30?

   Ответ: Нельзя

   Решение: Предположим, что все теннисисты разбиты на пары, и разность рейтингов в каждой паре не больше 30. В каждой паре рассмотрим наименьший и наибольший номер рейтинга оставшегося теннисиста. Наименьший номер в каждой паре увеличивается не более, чем на 30. Наибольший номер уменьшается не более, чем на 30. Разность между наибольшим и наименьшим номером всех теннисистов в одном этапе игр уменьшается не более, чем на 60. Изначально эта разность была 511. Для определения финальной пары нужно провести 8 этапов ($512 \to 256 \to 128 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2$). Значит, за эти 8 этапов разность между наибольшим и наименьшим номером изменится не больше, чем на $8 \cdot 60 = 480$. Поэтому разность наибольшего и наименьшего рейтинга в финальной паре окажется не меньше, чем $511 \cdot 480 = 31$. Получить разности рейтингов, не превосходящих 30, во всех парах не получится.

Матбой 2

1) Докажите, что для каждого натурального числа a найдется натуральное число b такое, что a и b взаимно просты, а число $a + b^2$ — составное.

   Решение: Возьмем любое число b, взаимно простое с a. Если число $p = a + b^2$ — составное, все в порядке. Если же p — простое, сумма $a+(b+ap)^2 = a+b^2+2abp+a^2p^2 = p(1 + 2ab + a^2p)$ — составное число.

2) Из 10 различных цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$ составили 2 натуральных числа, использовав каждую цифру ровно 1 раз. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) пары чисел подобного вида?

   Ответ: 48651

   Решение: Чтобы НОД был больше, числа должны быть пятизначными, но так как они не равны, то меньшее из них будет меньше 50000, и при этом оно будет в два раза меньше большего, иначе оно будет меньше 33333, что нас не устраивает.

   Начиная составлять эту пару чисел, нетрудно убедиться, что меньшее начинается с цифры 4, затем должна быть цифра 8 (если вторая цифра 9, то второе число начинается с 9, будет совпадение цифр). Поэтому во втором первые две цифры 9 и 7. Затем в первое поставим две наибольшие цифры, 6 и 5, тогда оставшиеся цифры при умножении меньшего числа на 2. В итоге меньшее число равно 48651, а большее — 97302.

3) В трехзначном числе, которое не оканчивается на 0, поменяли местами первую и третью цифры. Затем, одну из цифр уменьшили на 1, другую уменьшили на 2, а еще одну оставили без изменений. В результате получили число в 5 раз больше исходного. Каким могло быть исходное число (найдите все такие числа)? *(П.Цишевич)*

   Ответ: 168

   Решение: Обозначим исходное число за n, а то, которое получилось после всех изменений — за m. Из условия мы знаем, что $5n = m$. Значит, $5n = m < 1000$, то есть $n < 200$, а значит, первая цифра числа n — это 1. Пусть $n = \overline{1xy}$, тогда после того, как первую и третью цифры поменяли местами, получилось число $\overline{yx1}$. После того, как одну из цифр уменьшили на 1, другую уменьшили на 2, а еще одну оставили без изменений, получилось число m, которое должно оканчиваться на 0 или 5 (так как m делится на 5). То есть мы понимаем, что последнюю цифру уменьшили на 1. Тогда либо x уменьшили на 2, а y оставили без изменений, либо наоборот. Рассмотрим оба случая:

   а) $m = 100y + 10(x - 2)$. Подставляя это выражение в равенство $5n = m$ получим, что $5(100 + 10x + y) = 100y + 10(x - 2)$, то есть $19y = 8x + 104$. Ясно, что y должен быть четным числом, а также ясно, что $y > 5$ (иначе правая часть больше левой). Подставляя последовательно 6 и 8, получаем, что в первом случае решения нет, а во втором случае $x = 6$. То есть число 168 могло быть исходным.

б) $m = 100(y-2) + 10x$. В этом случае получаем уравнение $19y = 8x + 140$. Нетрудно убедиться, что это уравнение не имеет решений, когда x и y натуральные однозначные числа.

4) Найдите все такие натуральные n, что $n - 76$ и $n + 76$ — точные кубы.

Ответ: 49, 140

Решение: Пусть x^3 и y^3 равны $n + 76$ и $n - 76$ соответственно (можно заметить, что x и y числа одной четности). Тогда $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$, но одновременно это число равно $76 - (-76) = 152 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$. Поэтому $x - y$ является делителем числа 152.

Для случая $x - y = 2$ получим квадратное уравнение, из которого находятся следующие пары $(x; y) : (6; 4), (-4, -6)$. Эти ситуации приводят к тому, что $n = \pm 140$. Так как нас интересуют только натуральные n, то в ответ попадает только $n = 140$.

Для случая $x - y = -2$ получим уравнение $(y-2)^3 - y^3 = 152$.

$-6y^2 + 12y - 8 = 152$; $-6y^2 + 12y = 160$.

Левая часть кратна 3, правая часть не кратна 3.

Для случая $x - y = \pm 4$ также будут получаться уравнения, не имеющие корней.

Для случая $x - y = 8$ получим квадратное уравнение, из которого находятся следующие пары $(x; y) : (5; -3), (3, -5)$. Эти ситуации приводят к тому, что $n = \pm 49$. Снова в ответ попадает только $n = 49$.

Для случая $x - y = -8$ уравнение не будет иметь корней.

Если $x - y \geq 19$, то $x \geq y + 19$, а значит $x^2 + xy + y^2 \geq (y+19)^2 + y(y+19) + y^2 = 3y^2 + 57y + 361 > 8$. Последнее неравенство можно проверить перенеся все в левую часть и убедившись, что получившийся слева квадратный трехчлен не имеет корней. Далее, если выполняются 2 неравенства $x - y \geq 19$ и $x^2 + xy + y^2 > 8$, то $x^3 - y^3 > 19 \cdot 8 = 152$.

Если же $x - y \leq -19$, то $y \geq x + 19$. Аналогично получаем, что $x^2 + xy + y^2 > 8$, а значит $|x^3 - y^3| \geq 19 \cdot 8 = 152$.

5) В детском саду Маша и Оля взяли блокнот, разорвали на отдельные листочки, и на каждом листочке поставили фломастерами цветные точки. Воспитательница заметила, что количество точек на всех листочках у Маши в 13 раз больше, чем точек у Оли. Оля расплакалась, и Маша в утешение отдала Оле один свой листочек с наименьшим числом точек. Теперь у Маши оказалось точек всего лишь в 8 раз больше, чем у Оли. Докажите, что первоначально у Маши было не более 23 листочков.

Решение: Так как общее число точек можно поделить в пропорциях и $13 : 1$, и $8 : 1$, то общее число точек должно делиться и на 14, и на 9. Всего точек может быть $126k$ (k — натуральное). Поделим $126k$ в пропорции $13 : 1$, получим, что первоначально у Маши было $117k$ точек. Поделим $126k$ в пропорции $8 : 1$, получим, что у Маши стало $112k$ точек. Значит, на ее листочке с наименьшим числом точек было $5k$ точек (она отдала $5k$ точек). Поэтому первоначальное число листочков было не больше, чем $\frac{117k}{5k} = 23\frac{2}{5}$. Наибольшее возможное целое число листочков — 23.

6) Петя и Вася по очереди отмечают на доске точки A, B, C и D (сначала Петя ставит точку A, затем Вася ставит точку B и т.д.). Точки можно ставить с условием, что отрезки AB, BC, CD и AD не будут иметь общих точек, кроме концов. В полученной фигуре $ABCD$ мальчики измеряют величины всех четырех углов и записывают их в порядке неубывания. В результате игры Петя получает столько очков, какова градусная мера второго по величине угла. Какое наибольшее количество очков Петя может гарантированно получить в такой игре? *(П.Цишевич)*

Ответ: 60

Комментарий: Под величиной угла подразумевалась его градусная мера. Поэтому первый по величине угол — это тот угол, у которого самая большая градусная мера, а второй по величине — это, соответственно, следующий. Некоторые команды интерпретировали условие так, что берется второй угол из упорядоченного по неубыванию списка, то есть третий по величине угол. Во избежание двусмысленности, в условии было лучше поменять порядок сортировки (то есть сказать, что углы упорядочили в порядке невозрастания).

Решение: Общее наблюдение, от первых 2ух точек зависит только положение треугольника на плоскости, и его масштаб. Поэтому величины углов будут зависеть только от того, куда игроки поставят точки C и D.

Покажем сначала, что Петя может гарантировать себе 60 очков. Для этого ему достаточно поставить точку C на продолжении луча AB, тем самым он сделает $\angle ABC = 180°$. Тогда, куда бы Вася не поставил точку D, по принципу Дирихле наибольший из остальных углов будет $\geq 60°$. Получается, что Петя получит хотя бы 60 очков. С другой стороны, если Вася поставит точку D так, чтобы треугольник ACD был равносторонним то все оставшиеся углы будут по $60°$, а значит, Петя ровно 60 очков.

Теперь покажем, что если Петя поставит точку C по-другому, то это принесет ему меньшее количество очков. Если Петя поставит точку C так, что $\angle ABC \neq 180°$, то Вася всегда сможет поставить точку D так, чтобы четырехугольник $ABCD$ был невыпуклым ($\angle ABC > 180°$), а все остальные углы были равны между собой и равны $\frac{360°-\angle ABC}{3} < \frac{360°-180°}{3} = 60°$.

Матбой 3

1) Произведение 25 натуральных чисел оканчивается на 25. Докажите, что произведение каких-то трех из них также оканчивается на 25.

Решение: Очевидно, все сомножители нечетны. Значит, при делении на 4 они дают либо остаток 1, либо остаток 3. Будем называть первые «красными», а вторые — «синими». Заметим, что произведение некоторого числа сомножителей будет красным (соответственно, синим), если среди сомножителей четное (соответственно, нечетное) число синих. Возьмем два сомножителя, произведение которых делится на 25 (это либо два, делящиеся на 5, либо одно, делящееся на 25 и любое другое). Произведение 23-х остальных имеет тот же цвет, что и произведение этих двух (ибо произведение всех 25-ти, оканчивающееся на 25 - красное). Поскольку число 23 нечетно, среди этих 23-х сомножителей есть число того же цвета, что и их произведение. Домножим на него произведение двух первых сомножителей, и получим красное произведение трех сомножителей. Поскольку оно делится на 25, то на 25 и оканчивается.

2) Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на 99, у которых сумма двух крайних цифр равна сумме трех оставшихся цифр? *(П.Цишевич)*

Ответ: 91

Решение: Пусть наше пятизначное число имеет вид $\overline{abcde}$. По условию, $a + e = b + c + d$. Также, поскольку число должно делиться на 99 (а значит оно делится на 9 и на 11), получаем, что $a+b+c+d+e \vdots 9$ и $a-b+c-d+e \vdots 11$. Заменим во втором условии $a+e$ на $b+c+d$ и получим, что $2c \vdots 11$. Это возможно только если $c = 0$. Тогда $a+e = b+d$ и $a+b+d+e = 2(a+e) \vdots 9$. Значит, $b+d = a+e \vdots 9$. Либо обе суммы равны 9, либо они равны 18. Если обе суммы равны 18, то $a = b = d = e = 9$ (1 вариант). Посмотрим теперь сколько существует пар цифр, сумма которых равна 9. Их ровно 10 (0+9, 1+8, 2+7, ..., 9+0). Тогда пара (b, d) может принимать 10 различных значений, а пара (a, e) — 9 значений (т.к. $a \neq 0$). Пользуясь правилом умножения в комбинаторике, получаем, что существует ровно $10 \cdot 9 = 90$ таких комбинаций.

3) Найдите все натуральные N такие, что произведение N первых факториалов $(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (N-1)! \cdot N!)$ оканчивается ровно на N нулей.

Ответ: 13

Решение: Количество нулей на конце числа зависит от количества двоек и пятёрок в разложении на простые множители, но пятёрок будет заведомо меньше, при этом, если $N \leq 4$, то пятёрок в разложении вообще нет, при $N \leq 9$ их будет на 4 меньше нужного количества, при $10 \leq N \leq 12$ эта разность уменьшается на каждом шаге на 1, при $N = 13$ в разложении пятёрок будет ровно 13, а затем их количество будет на каждом шаге возрастать не менее, чем на 2 (т. к. в каждом следующем факториале всегда будут присутствовать множители 5 и 10), и всегда будет больше N.

4) В однокруговом шахматном турнире участвует 18 шахматистов. У скольких из них по окончании турнира могло оказаться ровно 2 очка? (победа — 1 очко, ничья — $\frac{1}{2}$ очка, поражение — 0)

Ответ: от 0 до 5

Решение: пусть всего N таких шахматистов, тогда только в играх между собой они уже наберут $\frac{N(N-1)}{2}$ очков. Значит, $\frac{N(N-1)}{2} \leq 2N$, откуда находим, что $N \leq 5$. При этом для любого из этих вариантов (от 0 до 5 шахматистов) строится пример нужного распределения очков.

5) В каждой клетке доски размером $n \times n$ стоит по числу. Все числа различны. В каждом столбце отметили клетку с самым большим числом. После этого на доску поставили n ладей, не бьющих друг друга, таким образом, что сумма чисел на клетках, где стоят ладьи, максимальна. Докажите, что по крайней мере одна ладья оказалась на отмеченной клетке.

Решение: Возьмем максимальную расстановку не бьющих друг друга ладей. Допустим, что ни одна из её ладей не стоит на отмеченной клетке. Выберем любую ладью и пометим цифрой 1 строчку, в которой эта ладья стоит. Сдвинем выбранную ладью на отмеченную клетку ее столбца. Строку, в которую ладья перешла, пометим цифрой 2, однако мы понимаем, что в этой строке имеется другая ладья. Также сдвинем ее на отмеченную клетку ее столбца (это возможно, ибо по нашему предположению она стоит на неотмеченной клетке) и пометим строку, в которую мы попали цифрой 3 и т.д. Поскольку ладей конечное число, этот процесс когда-то закончится, т.е. очередная ладья окажется в уже помеченной строке (пусть номер этой строки i). Теперь полностью вернем начальную расстановку и из нее снова начнем двигать ладьи, но теперь не со случайной, а с той, которая стоит в i-ой помеченной строке. Повторяя алгоритм из начала решения, мы рано или поздно вернемся в строчку i, где на сей раз не будет ни одной ладьи. Таким образом мы получим новую расстановку не бьющих друг друга ладей, у которой сумма чисел, на которых стоят ладьи, больше, чем у исходной расстановки (ибо у каждой из сдвинутых ладей число, на котором она стоит, увеличилось). Противоречие.

6) Внутри треугольника ABC выбрана точка O. Будем называть отрезок «коротким», если его длина ≤ 1010, и «длинным» — если его длина ≥ 2021. При каких k может случиться так, что среди отрезков AB, BC, AC, OA, OB и OC ровно k окажутся «короткими», а остальные $6-k$ окажутся «длинными»? *(П.Цишевич)*

Ответ: 0, 1, 2, 3, 6.

Решение: Докажем, что $k \neq 5$. Предположим, что может. Тогда есть ровно 1 «длинный» отрезок. Рассмотрим любой треугольник, в который он входит. Две другие стороны этого треугольника ≤ 1010, а значит сумма двух других сторон ≤ 2020, то есть не выполняется неравенство треугольника.

Докажем теперь, что $k \neq 4$. Также будем доказывать от противного. Если «длинными» окажутся две стороны треугольника ABC (для однозначности AB и BC), то рассмотрим треугольник AOB. Если «длинными» окажутся одна сторона треугольника ABC и один из отрезков, соединяющих вершины и точку O, то рассмотрим треугольник ABC. Если же оба «длинных» отрезка выходят из точки O (для однозначности OA и OB), то рассмотрим треугольник AOC. В каждом случае, для рассматриваемого треугольника не выполняется неравенство треугольника (размышления аналогичны случаю $k \neq 5$).

Для остальных случаев можно придумать примеры.