Устная командная олимпиада

1) (*3 балла*) Вася поставил на шахматную доску несколько не бьющих друг друга чернопольных слонов так, что нельзя больше добавить ни одного без нарушения этого правила. Сколько таких слонов могло оказаться на доске? (Укажите все варианты, с обоснованием).

   Ответ: от 4 до 7

   Решение: Больше 7 однопольных слонов невозможно поставить, чтобы они не били друг друга (в одном из направлений есть всего 7 диагоналей).

   Кроме того, 3 чернопольных слона не могут побить все черные поля, значит, всегда можно поставить четвертого. Для доказательства этого факта можно посмотреть на черные клетки по краям доски. Всего таких клеток 14, а один слон бьет не больше, чем 4 клетки с краю.

   Для 4, 5, 6 и 7 слонов есть примеры.

2) (*3 балла*) Цифры $1, 2, \ldots, 9$ разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

   Решение: Произведение чисел во всех группах равно $9! = 362880$, а
   $71^3 = 357911 < 9!$.

3) (*3 балла*) В четырёхзначном числе каждую цифру увеличили на 1 или на 5 (если сумма была больше 9, единица переносилась в следующий разряд), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число?

   Ответ: 1717

   Решение: Пусть x — исходное число. Увеличив каждую цифру на 1 или 5, к числу x прибавили некоторое четырёхзначное число из единиц и пятёрок. Так как получили $4x$, то прибавленное число равно $3x$, оно делится на 3 и не меньше 3000. Из признака делимости на 3 следует, что в записи числа две 1 и две 5, а из условия $3x \geq 3000$ — что его первая цифра равна 5. Таким образом, остаются лишь три варианта для числа $3x$ — 5511, 5151, 5115. Соответственно, $x = 1837, 1717, 1705$. Подходит лишь второй вариант — 1717.

4) (*2 балла*) Шахматисты в турнире сыграли 224 партии. Каждые двое сыграли друг с другом одно и тоже число партий (не обязательно в один круг). Сколько всего шахматистов?

   Ответ: 2 или 8

   Решение: Если N шахматистов сыграли по k партий, то всего было сыграно $\frac{N(N-1)k}{2}$ партий. Приравнивая к числу 224, получи уравнение в натуральных числах
   $N(N-1)k = 448$, где $N \geq 2$. Среди делителей числа 448 есть две пары отличающихся на 1 (1 и 2, 7 и 8). Поэтому, могло быть либо 2, либо 8 шахматистов.

5) (*2 балла*) В клетчатом квадрате 8×8 проведена главная диагональ. Сколько всего различных треугольников, стороны которых идут по линиям получившейся сетки?

Ответ: 72

Решение: Треугольники среди своих вершин имеют две на этой главной диагонали, а каждые два узла из этих девяти дают по два нужных треугольника и всего треугольников $2C_9^2 = 2 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 72$.

6) (*4 балла*) Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 30 и имеющее ровно 105 различных натуральных делителей.

Ответ: 5062500

Решение: Из условия следует, что в разложении на простые множители у нашего числа N присутствуют 2, 3 и 5. Тогда $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots$. Любой делитель числа N содержит те же простые множители, но, возможно, в меньших степенях, и соответственно для каждого простого числа количество вариантов степени на 1 больше его степени в разложении. Таким образом всего получается $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots = 105$ делителей. Поскольку $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и число 105 нельзя представить в виде произведения более трёх натуральных чисел, больших 1, то у искомого числа N не может быть более трёх простых множителей. Значит, у N в разложении присутствуют только 2, 3 и 5, которые имеют степени 2, 4 и 6. Из 6 возможных вариантов выбираем самое большое число $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 5062500$.

7) (*3 балла*) Найдите все натуральные числа, сумма цифр которых равна разности между 328 и самим числом.

Ответ: 317

Решение: $x + y + z = 328 - 100x - 10y - z$;

$101x + 11y + 2z = 328$. $x \leq 3$. Если $x \leq 2$, то даже при $y = 9$ число $z > 10$. Значит, $x = 3$.

$11y + 2z = 25$.

$y \leq 2$. Можно проверить, что при $y = 0$ и $y = 2$ z будет дробным. Значит $y = 1$.

$2z = 14$;

$z = 7$.

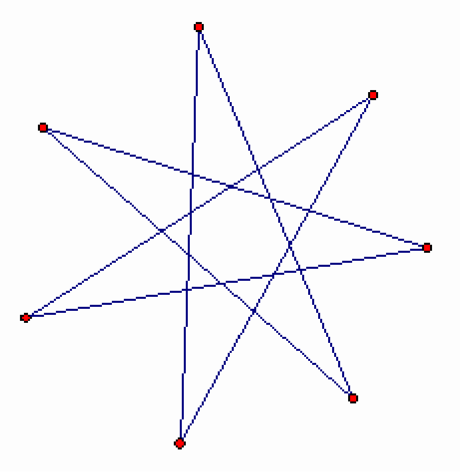
Проверим: $328 - 317 = 11$. Сумма цифр числа $317 : 3 + 1 + 7 = 11$

8) (*3 балла*) Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная линия, состоящая из 7 звеньев, попарно не лежащих на одной прямой? Вершина ломаной не лежит на звене, если не является одним из его концов.

Ответ: 14

Решение: Рассмотрим звено AB этой ломаной. На отрезке AB могут находиться не более четырёх точек самопересечения, поскольку со звеньями, исходящими из вершин A и B, отрезок AB пересечься не может. Так как у ломаной 7 звеньев и в каждой точке пересекаются два звена, то точек самопересечения не больше чем $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

Пример ломаной, у которой 14 точек самопересечения, приведён на рисунке:



9) (*2 балла*) Сколько разных натуральных делителей имеет число $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$?

Ответ: 270

Решение: Число можно представить как $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$.

Общий вид множителя $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, где показатели меняются от 0 до степеней, в которых входит в разложение факториала соответствующий простой множитель.

По правилу произведения получаем $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$.