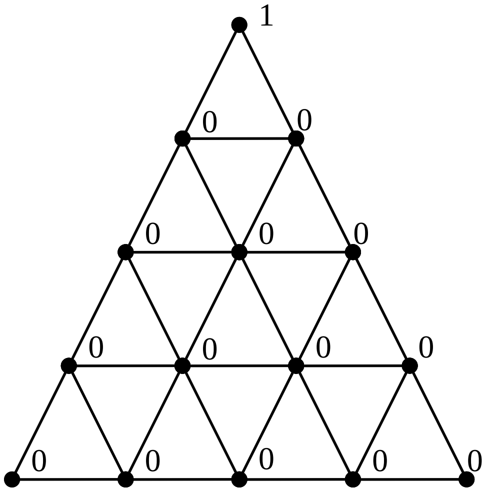
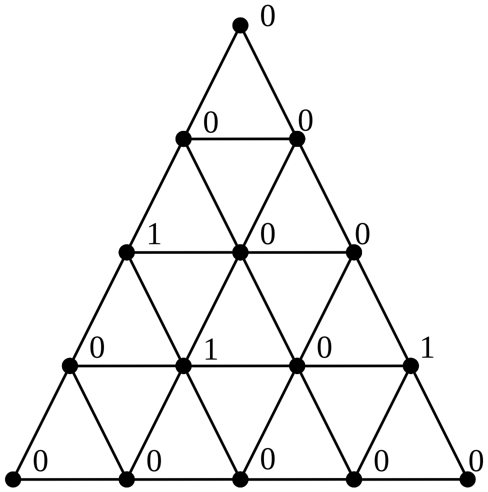
Одиннадцатый Северный математический турнир.
Личная письменная олимпиада. Старшая лига. 5 марта 2021 года.

1. Докажите, что при всех положительных a, b выполняется неравенство $a(a^3 + 1) + b(b^3 + 1) \geq a^2b^2 + 3ab$.

2. Существуют ли пять натуральных чисел таких, что для них выполнены следующие условия:
(1) ни одно из них не делится (нацело) ни на одно из остальных;
(2) произведение любых четырёх из них делится на произведение любых трёх;
(3) произведение любых трёх чисел делится на произведение любых двух;
(4) наконец, произведение любых двух чисел, возведённое в куб, делится на произведение всех пяти чисел?

3. В каждом из 15 узлов треугольной сетки находится монета, на одной стороне которой написано число 0, а на другой 1. За один ход разрешается взять три любые монеты, расположенные в вершинах маленького треугольника, и перевернуть их на противоположную сторону. Можно ли за несколько ходов из расположения монет на левом рисунке получить расположение монет на правом рисунке?





4. На стороне AB равностороннего треугольника ABC со стороной 11 отмечены точки M и N так, что AM = BN = 2, а на стороне BC – точка Q такая, что BQ = 3. P, P' – точки пересечения описанной окружности треугольника MNQ и стороны AC треугольника. Докажите, что MNQP и MNQP' – равнобедренные трапеции.

Максимальное количество баллов по каждой задаче 7.

Одиннадцатый Северный математический турнир.
Личная письменная олимпиада. Старшая лига. Решения.

1. **Решение**. $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$ (это неравенство получается из $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ при раскрытии скобок).

Поэтому $a(a^3 + 1) + b(b^3 + 1) = a^4 + b^4 + a + b \geq 2a^2b^2 + a + b$. Осталось доказать, что $2a^2b^2 + a + b \geq a^2b^2 + 3ab$, или $a^2b^2 + a + b \geq 3ab$. Последнее неравенство после деления на 3 – это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для a^2b^2, a, b.

Лемма (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для трёх чисел). Пусть a, b, c - неотрицательные числа. Тогда $(a + b + c)/3 \geq \sqrt[3]{abc}$.

Доказательство леммы. Пусть $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, тогда после умножения на 3 утверждение леммы приводится к виду $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$. Для доказательства последнего неравенства заметим, что
$2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) =$
$x(x - y)^2 + x(x - z)^2 + y(y - x)^2 + y(y - z)^2 + z(z - x)^2 + z(z - y)^2 + x(y - z)^2 + y(x - z)^2 + z(x - y)^2 \geq 0$.

Критерии. *1. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для трёх чисел можно использовать без обоснования при условии верной формулировки.*

2. **Ответ**: существуют.

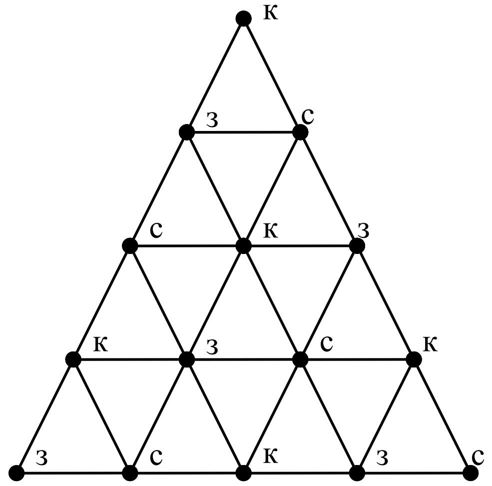
Решение. Рассмотрим 5 различных простых чисел a, b, c, d, e. Пусть искомые числа равны $a\Pi$, $b\Pi$, $c\Pi$, $d\Pi$, $e\Pi$, где $\Pi = a^3b^3c^3d^3e^3$. В произведение любых двух из них два простых входят в 7-й степени, а три других простых в 6-й степени. В произведение любых трёх из них три простых входят в 10-й степени, а два других простых в 9-й степени. В произведение любых четырёх из них четыре простых входят в 13-й степени, а оставшееся простое в 12-й степени. Наконец, в произведение всех пяти чисел каждое из пяти простых входит в 16-й степени.

Так как $\max(6, 7) < \min(9, 10)$, второе условие выполнено. Так как $\max(9, 10) < \min(12, 13)$, третье условие выполнено. Так как $16 < 3 \cdot \min(6, 7)$, четвёртое условие выполнено. Наконец, ни одно из чисел не делится ни на одно из остальных, так как третья степень простого не разделится на четвёртую.

Критерии. *1. Верный пример без обоснования 5 баллов.*

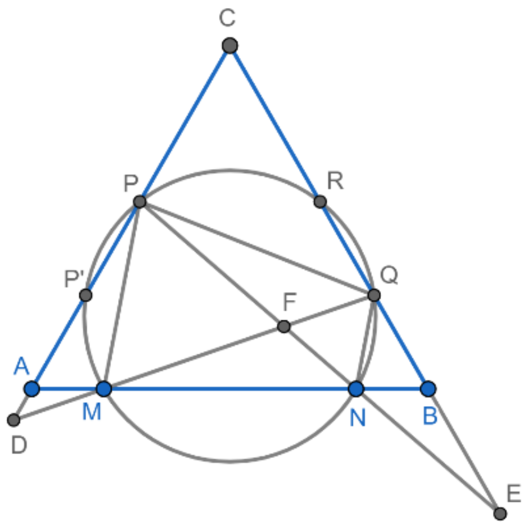
3. **Ответ**: нельзя.

Решение. Покрасим узлы треугольной сетки в три цвета так, что любые два соседних узла разного цвета (см. рис.) Заметим, что во время хода происходит переворачивание монет в красной, зелёной и синей вершинах, поэтому чётность количества вершин каждого цвета, в которых находится единица, в течение хода меняется на противоположную. А разности между чётностями количества вершин, скажем, красного и зелёного цвета (или любых других цветов) с единицами не меняются. Вначале разность К – З нечётна, в конце должна быть чётна. Значит, получить требуемое нельзя.



Критерии. *1. Найден инвариант, решающий задачу, но не использован или неверно использован 3 балла. Раскраска в два цвета (чередующиеся строки с узлами) не решает задачу. Чётность количества перевёрнутых монет не решает задачу. Система уравнений может решать задачу.*

4. **Решение**. Проведём ось симметрии треугольника ABC через вершину C и точку H – середину стороны AB. Обозначим точку пересечения окружности со стороной AC, симметричную точке Q относительно проведённой оси симметрии, через P’, а другую точку пересечения – через P. Пусть D – точка пересечения прямых AC и MQ, E – точка пересечения прямых BC и NP, F – точка пересечения прямых MQ и NP, R – вторая точка пересечения окружности с прямой BC.



Для точки P’ доказываемое утверждение следует из симметрии относительно высоты CH: симметричны точки A и B, P’ и Q, M и N, значит, MP’ = NQ. Прямые P’Q и AB перпендикулярны CH, а значит, параллельны. При этом AP’ и BQ не параллельны, так как пересекаются в точке C. Итак, четырёхугольник MNQP’ – равнобедренная трапеция.

Докажем утверждение задачи для точки P. Для секущих BM и BR выполняется соотношение $BN \cdot BM = BQ \cdot BR$, значит, $BR = 2 \cdot 9 : 3 = 6$, а $CR = BC - BR = 11 - 6 = 5 = CP$ (последнее равенство верно в силу симметрии относительно CH окружности и треугольника, а значит, и точек их пересечения).

Запишем теорему Менелая для треугольника ABC и прямых DQ и PE:
$(BQ / QC) \cdot (CD / DA) \cdot (AM / MB) = 1$;
$(CE / BE) \cdot (BN / NA) \cdot (AP / PC) = 1$.
Отсюда $CD : AD = 8/3 \cdot 9/2 = 12$, $AC : AD = 11$, $AD = 1$
и $CE : BE = 9/2 \cdot 5/6 = 15/4$, $BC : BE = 11 : 4$, $BE = 4$.

Заметим, что треугольники ADM и BNE подобны
($\angle DAM = \angle NBE = 180^0 - 60^0 = 120^0$, $AD : BN = 1 : 2 = 2 : 4 = AM : BE$).
Тогда $\angle BEN = \angle AMD = \angle QMN = \angle QPN = \alpha$, $\angle ADM = \angle BNE = \angle PNM = \angle PQM = \beta$.
В треугольнике ADM сумма углов равна $\alpha + \beta + 120^0 = 180^0$, значит, $\alpha + \beta = 60^0$.

$\angle PNQ = \angle PMQ = ½\cdot\smile PQ = ½\cdot\smile PN - ½\cdot\smile P’M = \angle PAN = 60^0$.
$\angle PFM = \angle QPF + \angle PQF = \alpha + \beta = 60^0$.
Значит, треугольник PFM равносторонний, и $\angle MPF = 60^0$.
Поэтому прямые MP и NQ параллельны ($\angle PNQ=\angle MPN$), а четырёхугольник MNQP – трапеция.

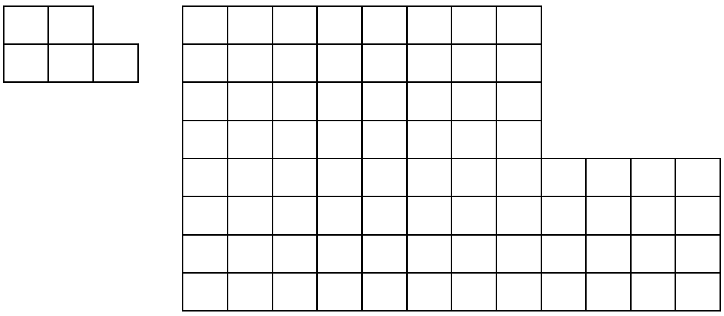
Осталось проверить равенство её боковых сторон. В треугольнике PQE $\angle QPN = \angle QEP = \alpha$. Значит, он равнобедренный, и $QP = QE = QB + BE = 3 + 4 = 7 = MN$. Поэтому трапеция MNQP равнобедренная.

Критерии. *1. Доказано только для равнобедренной трапеции MNQP’ (см. рис.) 1 балл.*

Одиннадцатый Северный математический турнир.
Личная письменная олимпиада. Младшая лига. 5 марта 2021 года.

1. В подземелье Тёмного властелина имеется 7 одиночных камер, занумерованных числами от 1 до 7. В четырёх из них находятся несчастные узники – Алиса, Боря, Вика и Гриша. В остальных трёх камерах находятся злые крокодилы – большой и два маленьких. Все они знают, кто где находится. Светлый герой добрался до подземелья, и Тёмный властелин предложил ему задачу. Каждый из узников (включая крокодилов) напишет на табличке три любых номера камер (т.е. натуральных числа от 1 до 7) в порядке возрастания (можно писать номер своей камеры), и эти таблички будут вывешены на дверях камер тех, кто на них писал. Если после этого Светлый герой сможет угадать, кто в какой камере (он должен угадать не только каждого из узников, но и где большой крокодил), он может освободить кого пожелает. В противном случае Тёмный властелин может отдать на съедение крокодилам кого пожелает. Перед тем, как узники будут писать числа на табличках, Светлый герой может передать каждому из узников записку с инструкцией. Может ли Светлый герой действовать так, чтобы освободить Алису, Борю, Вику и Гришу независимо от того, какие числа напишут крокодилы на своих табличках?

2. Имеются 5-клеточная фигура, изображённая на левом рисунке, и 80-клеточная фигура, изображённая на правом рисунке. Разрешается выполнять следующее действие: любую фигуру можно разрезать на 4 равные фигуры. Можно ли за несколько действий разрезать 80-клеточную фигуру на 5-клеточные фигуры, равные фигуре на левом рисунке?



Фигуры называются равными, если при наложении фигур друг на друга их границы можно совместить. Перед наложением фигуры можно переворачивать на другую сторону.

3. Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, удовлетворяющие уравнению
$a^2 + b^2 - d^2 - 2ab + 2ac - 2bc - 2cd = 126$.

4. На отрезке длины 2100 отмечена 2021 точка. Известно, что для любых двух отмеченных точек расстояние между ними либо не больше 20, либо не меньше 21. Докажите, что существуют две отмеченные точки, расстояние между которыми не больше 1.

Максимальное количество баллов по каждой задаче 7.

Одиннадцатый Северный математический турнир.
Личная письменная олимпиада. Младшая лига. Решения.

1. **Ответ**: может.

Решение. Пусть узники представят, что вчетвером стоят по кругу в таком порядке: Алиса, Боря, Вика, Гриша; они должны указать, во-первых, номера своих соседей по кругу; кроме того, Алиса укажет номер своей камеры, Боря – номер камеры большого крокодила, Вика – номер камеры Алисы и, наконец, Гриша – номер камеры Бори. Именно это должен написать Светлый герой в инструкциях.

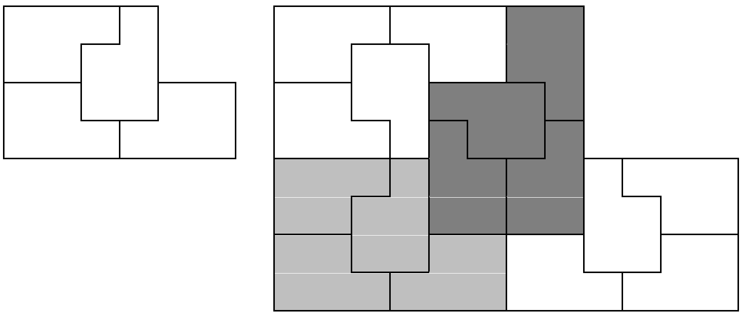
После того, как все напишут числа на табличках, Светлый герой нарисует схему со стрелками (ориентированный граф), где вершины – номера камер, а стрелки (ориентированные рёбра) ведут из них к номерам камер, которые написаны на табличке из камеры с соответствующим номером. Задача героя – найти цикл длины 4, состоящий из двусторонних стрелок, в который входят четверо узников. Если он находит такой цикл, он сразу же определяет Алису (она единственная в цикле указывает на себя), затем Борю (он указывает на кого-то, кто не входит в цикл), затем определяет Вику и Гришу (Вика указывает на Борю, а Гриша на Алису). Большой крокодил там, где написал Боря; маленькие – в оставшихся камерах.

Если существует цикл длины 4 из двусторонних стрелок с участием крокодилов, в него не могут входить только крокодилы (так как их трое); значит, должен быть кто-то из узников. Но на крокодилов показывает только Боря. А для цикла необходимо, чтобы крокодилы были связаны с не крокодилами не менее, чем двумя двусторонними стрелками.

Критерии. *1. Верный алгоритм действий без обоснования 5 баллов. Если жюри не может установить, что алгоритм верный 0 баллов.*
2. Если алгоритм позволяет определить только каждого из узников 1 балл.

2. **Ответ**: можно.

Решение. Рассмотрим 20-клеточную фигуру на левом рисунке. Её можно разрезать на четыре 5-клеточные фигуры из условия. Рассмотрим 80-клеточную фигуру (см. правый рисунок); её таким же образом можно разрезать на четыре 20-клеточные фигуры.



Критерии. *1. Только получена оценка на количество фигур из соображений площади / количества клеток 0 баллов.*

3. **Ответ**: таких четвёрок нет.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения: $a^2 + b^2 - d^2 - 2ab + 2ac - 2bc - 2cd =$
$(a - b)^2 - d^2 + 2ac - 2bc - 2cd = (a - b)^2 - d^2 + 2c(a - b) - 2cd = (a - b)^2 + 2c(a - b) + c^2 - c^2 - 2cd - d^2 =$
$(a - b + c)^2 - (c + d)^2$. Дальше можно рассуждать разными способами.

<u>Первый способ.</u> Квадрат целого числа даёт при делении на 4 остаток 0 или 1.
В самом деле, $(2k)^2 = 4\cdot k^2 + 0$, $(2k + 1)^2 = 4\cdot(k^2 + k) + 1$.

Поэтому разность квадратов целых чисел одной чётности кратна 4, а разность квадратов целых чисел разной чётности отличается от числа, кратного 4, на 1 в ту или иную сторону. 126 даёт остаток 2 при делении на 4, поэтому равенство $(a - b + c)^2 - (c + d)^2 = 126$ невозможно ни при каких целых a, b, c, d.

Второй способ. Пусть $m = a - b + c$, $n = c + d$. Заметим, что m и n целые. $m^2 - n^2 = 126$. Преобразуем: $(m - n)(m + n) = 2\cdot 3^2\cdot 7$. Числа $m + n$ и $m - n$ одинаковой чётности, так как их разность $(m + n) - (m - n) = 2n$ чётна. Но простое число 2, имеющееся в правой части равенства в первой степени, входит в разложение на простые множители ровно одной из скобок левой части. Поэтому одна из скобок чётна, а другая нечётна. Получено противоречие, из которого следует, что целочисленных решений у исходного уравнения нет.

Критерии. *1. Преобразовано к виду $(a - b + c)^2 - (c + d)^2 = 126$ без дальнейших содержательных продвижений 2 балла.*
2. Любые утверждения про остатки, которые дают квадраты целых чисел (в частности, при делении на 4), необходимо обосновывать.

4. **Решение**. Разделим отрезок на 101 равную часть; длина каждой части будет 2100/101. По принципу Дирихле в одной из частей будет не менее 2021/101 точек, т.е. не менее 21 точки; пусть крайние из них – точки A и B. Поскольку они обе находятся на отрезке длины 2100/101, расстояние между ними не больше этой длины. Но $2100/101 < 21$. Тогда по условию расстояние AB не больше 20.

Разделим отрезок AB на 20 равных частей; каждая из них не больше 1. По принципу Дирихле в одной из частей будет не менее 21/20 отмеченных точек, т.е. по крайней мере две. Любые две точки с этого отрезка удовлетворяют условию.

Критерии. *1. Попытки применить принцип Дирихле, не приводящие к решению задачи 0 баллов.*

Одиннадцатый Северный математический турнир.

Командная устная олимпиада. Старшая лига. 5 марта 2021 года.

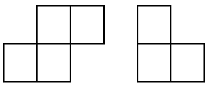
1. (2 балла) На карточке написано число 1. Имеются два печатающих автомата. Если поместить карточку с числом n в первый печатающий автомат, он выдаст карточку с числом n-2. Если поместить карточку с числом n во второй печатающий автомат, он выдаст карточку с числом 9n. Распечатка карточки на любом автомате стоит 1 рубль. Требуется получить карточку с числом 2021. Найдите наименьшую сумму денег, которую придётся для этого израсходовать.

2. (2 балла) Вершины правильного 11-угольника необходимо покрасить в k цветов таким образом, чтобы для любого цвета никакие два отрезка с вершинами этого цвета не имели равную длину. Найдите минимальное k, для которого требуемая раскраска существует.

3. (3 баллов) Прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB вписан в окружность ω. Продолжение медианы CM повторно пересекает окружность в точке D. Касательная к ω в точке D пересекает прямые AC и BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $\angle CBP = \angle CAQ$.

4. (4 балла) Имеется куб 2021 х 2021 х 2021, составленный из 2021^3 кубиков с ребром 1. Каждый из кубиков – красного или синего цвета. Может ли так оказаться, что для каждого красного кубика ровно три его соседа, имеющих с ним общую грань, красные, а для каждого синего кубика ровно три его соседа, имеющих с ним общую грань, синие?

5. (4 балла) Имеются фигуры двух видов (см. рис.). Можно ли этими фигурами закрыть в один слой прямоугольник 5 х 9 клеток? Фигуры можно поворачивать и переворачивать на другую сторону. Необходимо использовать фигуры каждого вида.



6. (6 баллов) Положительные числа a и b таковы, что $a^2 + b^3 \geq a^3 + b^4$. Докажите, что $a^3 + b^3 \leq 2$.

7. (7 баллов) Докажите, что при всех натуральных m и n следующее число целое:

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

Одиннадцатый Северный математический турнир.
Командная устная олимпиада. Старшая лига. Решения.

1. **Ответ**: 10 рублей.

Решение. Пример: $1 \to 9 \to 7 \to 5 \to 3 \to 27 \to 25 \to 225 \to 2025 \to 2023 \to 2021$.

Оценка. Будем выполнять действия в обратном порядке (делить на 9 и прибавлять 2), чтобы из 2021 получить 1. Заметим, что если число делится на 9, то, прибавляя по 2, мы вновь получим число, кратное 9, лишь через 9 действий. Также заметим (по индукции), что если число больше, чем 9^k, то для того, чтобы из него получить 1, требуется не меньше, чем $k+1$ действие.

Итак, $2021 \to 2023 \to 2025$. Если сейчас не делить на 9, то придётся следующие 9 действий прибавлять по 2, т.е. всего будет сделано не менее 11 действий (но выше приведён алгоритм, позволяющий получить требуемое за 10 действий). Значит, $2025 \to 225$.

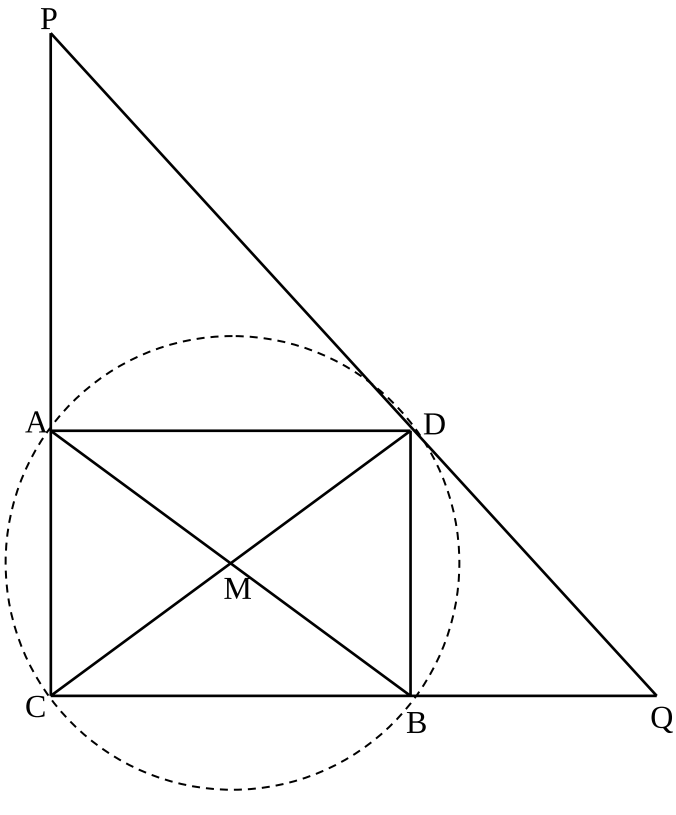
Легко заметить, что делить на 9 необходимо всегда, когда текущее число делится на 9 (иначе 9 прибавлений по 2 плюс ранее совершённые действия составят больше, чем 10 действий, в то время как известен алгоритм с 10 действиями). Поэтому $225 \to 25 \to 27 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 1$. Осталось переписать эти действия в обратном порядке.

2. **Ответ**: $k = 4$.

Решение. Оценка. Докажем, что в один цвет нельзя покрасить больше трёх вершин. Из этого будет следовать, что потребуется не меньше 4 цветов. Для доказательства занумеруем вершины по часовой стрелке. Заметим, что в 11-угольнике 5 типов расстояний между парами вершин (от длины стороны до длины наидлиннейшей диагонали); они реализуются в парах вершин 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 1 и 6. Если в один цвет покрашены четыре вершины, между ними можно провести 6 отрезков, и какие-то два из них будут одной длины.

Пример. Вершины 1, 2, 4 покрашены в красный цвет, вершины 3, 5, 6 в синий цвет, вершины 7, 8, 10 в зелёный цвет и вершины 9, 11 в жёлтый цвет. Каждый из треугольников с одноцветными вершинами, очевидно, не равнобедренный.

3. **Решение**. CM – медиана, проведённая к гипотенузе; она равна половине гипотенузы. Поэтому CM = AB/2 = AM = BM, и M – центр окружности. Ещё одним радиусом окружности ω является MD. Так как AB и CD делятся точкой пересечения пополам, ACBD – параллелограмм. С учётом того, что угол C прямой, ACBD прямоугольник.



Прямоугольные треугольники PAD, PCQ, DBQ подобны по двум углам (по прямому углу и по общему углу в каждой из пар треугольников PAD, PCQ и PCQ, DBQ). Так как CD – высота в прямоугольном треугольнике PCQ, треугольники PDC и CDQ подобны треугольнику PCQ. Пусть $\angle APD = \alpha$. Тогда $\angle BAD = \angle BCD = \angle QCD = \alpha$, $\angle PQC = 90^\circ - \alpha$. Так как сумма углов PQB и PAB равна 180°, точки A, B, Q, P лежат на одной окружности. Поэтому углы PBQ и PAQ равны.

Углы CBP и CAQ равны как смежные с равными углами PBQ и PAQ соответственно.

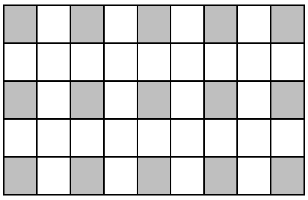
4. **Ответ**: не может.

Решение. Предположим противное - пусть требуемое возможно. Рассмотрим граф, вершины которого – единичные кубики, а рёбра соединяют кубики одного цвета, имеющие общую грань. Пусть требуемое возможно, и степени всех вершин графа равны 3. Достаточно доказать, что в этом графе каждая компонента связности содержит чётное количество вершин. Сложив количество вершин по компонентам, получим, что в графе чётное количество вершин. Но 2021^3 нечётно – противоречие.

Рассмотрим произвольную компоненту связности. У каждого кубика имеются три координаты (целые числа от 1 до 2021). Назовём кубики, у которых сумма всех трёх координат чётна, чётными, а кубики, у которых сумма координат нечётна – нечётными. Заметим, что рёбра графа соединяют только чётные кубики с нечётными, т. е. граф двудольный. Пусть в компоненте связности в одной доле a вершин, в другой доле b вершин. Тогда, с одной стороны, между долями проведено 3a рёбер, с другой стороны, 3b. Поэтому a = b, и общее количество вершин в компоненте связности чётно.

5. **Ответ**: нельзя.

Решение. Покрасим клетки как на рисунке. В прямоугольнике 45 клеток. Так как нельзя использовать только трёхклеточные фигуры, мы вынуждены использовать меньше 15 фигур. Четырёхклеточная фигура закрывает ровно одну покрашенную клетку, а трёхклеточная – не более одной покрашенной клетки. Всего будет закрыто меньше 15 закрашенных клеток. Но их 15. Значит, расположить фигуры требуемым образом нельзя.



6. **Решение**. Рассмотрим два случая.

1 случай. $a + b^2 < a^2 + b^3$. Сложим это неравенство с неравенством из условия.
Получим $(a + b^2) + (a^3 + b^4) < 2(a^2 + b^3)$. (1)
С другой стороны, из неравенств $a\cdot(a – 1)^2 \geq 0$, $b^2\cdot(b – 1)^2 \geq 0$ соответственно следуют неравенства $a + a^3 \geq 2a^2$ и $b^2 + b^4 \geq 2b^3$. Сложив их, получим $(a + b^2) + (a^3 + b^4) \geq 2(a^2 + b^3)$. (2)
Неравенства (1) и (2) противоречат друг другу. Поэтому первый случай невозможен.

2 случай. $a + b^2 \geq a^2 + b^3$. Тогда из условия следует, что $a + b^2 \geq a^3 + b^4$.
Сложив два последних неравенства, получим $2a + 2b^2 \geq a^2 + b^3 + a^3 + b^4$. (3)
Из неравенств $(a – 1)^2 \geq 0$, $(b^2 – 1)^2 \geq 0$ соответственно следуют неравенства $1 + a^2 \geq 2a$ и $1 + b^4 \geq 2b^2$.
Сложим их: $(1 + a^2) + (1 + b^4) \geq 2a + 2b^2$. (4). Из (3) и (4) следует $(1 + a^2) + (1 + b^4) \geq a^2 + b^3 + a^3 + b^4$.
После приведения подобных получаем $2 \geq a^3 + b^3$, что и требовалось.

7. **Решение**. Достаточно доказать, что любое простое, входящее в разложение (2m)!(2n)! на простые множители, входит туда в не меньшей степени, чем в разложение m!n!(m + n)!.

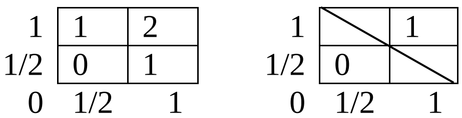
Вспомним, что максимальная степень простого p, на которую делится k!, равна $[k/p] + [k/p^2] + [k/p^3] + ...$ В самом деле, среди множителей от 1 до k тех, которые кратны p, имеется [k/p] (в каждой группе {1, 2, ..., p}, {p+1, p+2, ..., 2p}, ... только последнее число кратно p). Множителей, из которых можно взять по второму p, имеется $[k/p^2]$ (в каждой группе $\{1, 2, ..., p^2\}$, $\{p^2+1, p^2+2, ..., 2p^2\}$, ... только последнее число кратно p^2). По третьему p можно взять из $[k/p^3]$ множителей, и т.д.

Итак, надо сравнить $([2m/p] + [2m/p^2] + [2m/p^3] + ...) + ([2n/p] + [2n/p^2] + [2n/p^3] + ...)$ и
$([m/p] + [m/p^2] + [m/p^3] + ...) + ([n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + ...) + ([(m + n)/p] + [(m + n)/p^2] + [(m + n)/p^3] + ...)$

Будем сравнивать так: сначала суммы первых слагаемых в каждой скобке слева и справа, затем суммы вторых слагаемых и т.д. Достаточно доказать, что [2x] + [2y] ≥ [x] + [y] + [x + y] при действительных x, y. Заметим, что если x увеличить (или уменьшить) на 1, т. е. заменить на x + 1 (или x – 1) соответственно, обе части увеличатся (или уменьшатся) на 2, а разность между ними не изменится. В самом деле, [2(x + 1)] = [2x + 2] = [2x] + 2 и т.д. Аналогично проверяется, что изменение y на 1 в ту или иную сторону не изменяет разность между левой и правой частью неравенства.

Если неравенство доказано для любых x, y таких, что 0 ≤ x, y < 1, оно справедливо при всех действительных x, y. В самом деле, разобьём плоскость на единичные клетки и будем считать, что к каждой клетке относятся её левая и нижняя сторона, а также левая нижняя вершина, но не относятся верхняя и правая стороны и остальные три вершины. Одна из клеток задаётся условием 0 ≤ x, y < 1. Пусть пара чисел x, y лежит в какой-то другой клетке. Будем изменять x на 1, пока не будет выполнено условие 0 ≤ x < 1. Затем будем изменять y, пока пара чисел (x; y) не окажется в клетке 0 ≤ x, y < 1. Так как для этих значений неравенство по предположению доказано, а последовательные изменения пары чисел (x; y) на единицу не изменяют разность между левой и правой частью неравенства, для исходного значения x и y неравенство также выполнено.

Осталось доказать [2x] + [2y] ≥ [x] + [y] + [x + y] при 0 ≤ x, y < 1. Разобьём квадрат 0 ≤ x, y < 1 на 4 квадрата со стороной 1/2. В каждом из них напишем значения левой и правой частей неравенства. Осталось проверить, что при наложении областей друг на друга и проведении тех и других границ значение левой части неравенства для любой области не меньше, чем значение правой части неравенства. На правом рисунке диагональ разделяет области, для которых [x + y] равно 0 и 1.



Вероятно, существуют и другие (комбинаторные) решения этой задачи.

Одиннадцатый Северный математический турнир.

Командная устная олимпиада. Младшая лига. 5 марта 2021 года.

1. (3 балла) Зритель выкладывает на стол 6 карточек с числами (две единицы, две двойки и две тройки) в ряд в некотором порядке. Ассистент фокусника переворачивает три карточки. После этого заходит фокусник и угадывает числа на перевёрнутых карточках. Могут ли ассистент и фокусник заранее договориться, каким образом надо переворачивать карточки, чтобы фокусник всегда мог безошибочно угадывать числа на перевёрнутых карточках?

2. (3 балла) Барон Мюнхгаузен утверждает, что знает треугольник, который можно разрезать на 2021 треугольник, подобный исходному, среди которых нет равных. Может ли барон быть прав?

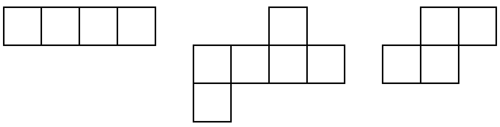
3. (3 балла) Имеется 18 гирь с надписями «1 грамм», «2 грамма», ..., «18 граммов» соответственно. Будем говорить, что гиря бракованная, если надпись на гире не соответствует её массе. Известно, что среди гирь не более одной бракованной. Имеется устройство с тремя контейнерами, в каждый из которых можно поместить ровно одну гирю. С помощью устройства можно определить, верно ли, что масса гири в первом контейнере равна сумме масс гирь во втором и третьем контейнерах. За какое минимальное количество использований устройства можно выяснить, есть ли среди гирь бракованная (находить бракованную гирю не нужно)?

4. (4 балла) В классе 22 школьника. Каждый из них дружит ровно с тремя одноклассниками; дружба взаимна. Учитель математики должен выбрать из класса наибольшее количество школьников таких, что любые два выбранных школьника не дружат между собой. Найдите наибольшее и наименьшее возможные количества школьников, которые может выбрать учитель.

5. (4 балла) В ряд выстроилось нечётное количество спортсменов. Каждый из них – в красном или синем спортивном костюме. Верно ли, что независимо от исходной расстановки один из спортсменов может выйти из строя, а остальные спортсмены – сомкнуть строй так, чтобы количество спортсменов в синих костюмах на нечётных местах было равно количеству спортсменов в синих костюмах на чётных местах?

6. (5 баллов) Существуют ли целые числа a, b, c, d такие, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 1002021$?

7. (6 баллов) Можно ли квадрат 10 x 10 клеток разрезать на фигуры трёх видов, изображённые на рисунке? Фигуры можно поворачивать и переворачивать на другую сторону.



Одиннадцатый Северный математический турнир.
Командная устная олимпиада. Младшая лига. Решения.

1. **Ответ**: могут.

Решение. Ассистент переворачивает последнюю карточку и любую пару одинаковых карточек. Тогда фокусник легко определит последнюю карточку (на ней то число, которое он видит в одном экземпляре). А значит, определит и остальные числа (они составят оставшуюся из пар {1; 1}; {2; 2}; {3; 3}).

2. **Ответ**: может.

Решение. Барон Мюнхгаузен всегда прав! Рассмотрим треугольник с углами 30, 60 и 90 градусов. Разрезав его по высоте, проведённой из вершины прямого угла, мы получим два треугольника с такими же наборами углов. Возьмём меньший из треугольников, разрежем его по высоте, проведённой из вершины прямого угла, и т.д. Все треугольники различны, так как каждый раз разрезается треугольник наименьшей площади, и площади новых треугольников меньше, чем площади всех ранее полученных.

3. **Ответ**: за 7 использований.

Решение. Каждую гирю необходимо поместить в устройство хотя бы раз. Если какую-то гирю не проверяли, мы про неё ничего не узнаем, а бракованной может быть именно она. Так как гирь 18, а в одной проверке участвует три гири, необходимо выполнить по крайней мере 6 проверок.

Пусть бракованная гиря имеет дефект массы меньше 1 грамма (т.е. её масса отличается от того, что написано на гире, меньше, чем на 1 грамм). Тогда имеет смысл проверять лишь тройки гирь такие, что масса, написанная на гире, помещаемой в первый контейнер, равна сумме масс гирь, помещаемых в два других контейнера. В самом деле, для любой другой проверки мы получим ответ о том, что соответствующее равенство неверно, а значит, с помощью такой проверки ничего нового не узнаем.

Предположим, что все 18 гирь мы распределили на 6 троек так, что в каждой тройке выполнено равенство вида $a = b + c$, где a, b, c – массы, написанные на гирях, помещаемых в 1-й, 2-й, 3-й контейнер соответственно. Сложим все числа, используемые в таких равенствах. С одной стороны, получим сумму масс всех гирь, она нечётна (так как среди масс, написанных на гирях, 9 нечётных). С другой стороны, сумма масс гирь, участвующих в каждом равенстве, чётна (и равна удвоенной массе в левой части равенства), а значит, сумма масс гирь во всех равенствах чётна. Полученное противоречие доказывает, что за 6 проверок узнать требуемое можно не всегда.

Алгоритм с 7 проверками. Достаточно проверить равенства
$18 = 11 + 7$
$16 = 10 + 6$
$14 = 9 + 5$
$12 = 8 + 4$
$17 = 14 + 3$
$15 = 13 + 2$
$13 = 12 + 1$

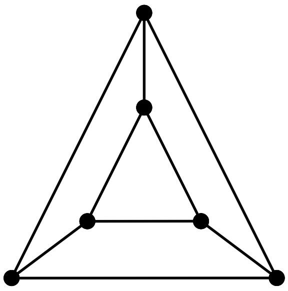
В этих равенствах каждая гиря участвует по крайней мере 1 раз. Если какая-то гиря бракованная, это будет выяснено в ходе соответствующей проверки. Существуют и другие алгоритмы проверки.

4. **Ответ**: наименьшее 6, наибольшее 11.

Решение. Заметим, что выбрать 6 школьников всегда можно. Берём любого школьника, не берём его друзей. Смотрим, кто остался. Среди оставшихся берём любого школьника, не берём его друзей. И т.д. Если взяли не больше 5 школьников, у них не больше 15 друзей, а значит, множество оставшихся школьников непусто.

Пусть в классе имеется четыре группы по 4 школьника такие, что в каждой группе все школьники дружат друг с другом. Тогда они больше ни с кем не дружат. Для составления искомой семёрки школьников из каждой группы можно выбрать не более, чем по одному школьнику.

Остальные 6 школьников могут дружить так, как изображено на рисунке (друзья соединены отрезками). Из каждого треугольника (внешнего и внутреннего) можно выбрать не более, чем по одному школьнику. Итак, в этом случае можно выбрать лишь 6 школьников таких, что любые два выбранных школьника не дружат между собой. Итак, возможен класс, из которого можно выбрать не более 6 школьников.



Пусть учитель выбрал $n \geq 12$ школьников. Каждый из выбранных школьников дружит с тремя не выбранными. А значит, имеется не менее 36 пар друзей таких, что в каждой паре один школьник не выбранный. Но не выбранных школьников всего 10; кто-то из них дружит более, чем с тремя одноклассниками, что противоречит условию. Поэтому больше 11 школьников выбрать нельзя.

Построим пример класса, из которого можно выбрать 11 школьников. Пусть класс делится на две половины, и в каждой половине школьники занумерованы числами от 1 до 11. Пусть школьник из первой половины класса, имеющий номер k ($2 \leq k \leq 10$), дружит со школьниками из второй половины класса, имеющими номера $k - 1$, k, $k + 1$. Школьника под номером 1 из первой половины класса «подружим» со школьниками под номерами 1, 2, 11 из второй половины класса. Школьника под номером 11 из первой половины класса «подружим» со школьниками под номерами 1, 10, 11 из второй половины класса. Условие задачи выполнено (у каждого школьника три друга в другой половине класса). Можно выбрать 11 школьников из первой половины класса.

5. **Ответ**: верно.

Решение. Индукция по количеству спортсменов. Заметим, что если в ряду находится один спортсмен, то условие задачи выполнено (после его ухода окажется по 0 спортсменов на местах одной и другой чётности). Пусть спортсменов $2k + 1$, и для предыдущего нечётного количества спортсменов ($2k - 1$) утверждение задачи верно. Рассмотрим два случая.

Если спортсмены в красных и синих костюмах чередуются, то выйти из строя может центральный из спортсменов. Спортсмены в синих костюмах находились на местах одной чётности. После ухода центрального спортсмена спортсменов в синих костюмах по ту и другую сторону от центра строя останется поровну. Спортсмены в синих костюмах по одну сторону от центра строя будут находиться на местах одной чётности, а по другую сторону от центра строя – на местах другой чётности.

Пусть спортсмены в красных и синих костюмах не чередуются. Значит, найдутся два спортсмена в костюмах одного цвета рядом друг с другом. Исключим их из рассмотрения. Чётность места в ряду у остальных спортсменов от этого не изменится. По предположению индукции найдётся спортсмен, выход которого из ряда приведёт к тому, что условие про спортсменов в синих костюмах будет выполнено. Вернём в рассмотрение пару спортсменов в костюмах одного цвета на соседних местах. Условие про спортсменов в синих костюмах от этого не нарушится.

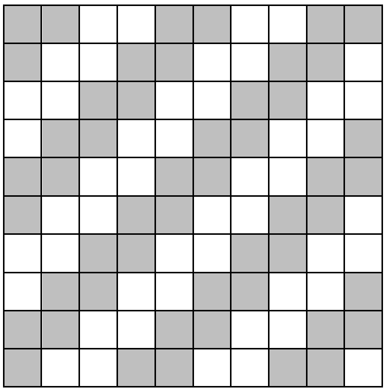
Описание алгоритма. Будем исключать из рассмотрения пары соседних спортсменов в одноцветных костюмах, пока это возможно. В оставшемся ряду цвета костюмов чередуются (в частности, может остаться один спортсмен). Выйти должен центральный в оставшемся ряду. Затем последовательно вернём пары исключённых спортсменов.

6. **Ответ**: не существуют.

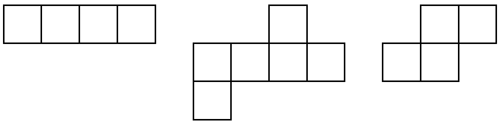
Решение. Заметим, что 4-я степень чётного числа делится на 8 (даже на 16), а 4-я степень нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 8. Действительно, $(2k)^4 = 16\cdot k^4$, $(2k + 1)^2 = 4\cdot(k^2 + k) + 1$,
$(2k + 1)^4 = (4\cdot(k^2 + k) + 1)^2 = (4t + 1)^2 = 8(2t^2 + t) + 1$. Поэтому сумма четырёх 4-х степеней при делении на 8 может давать лишь остатки от 0 до 4. Но 1 000 000 и 2 000 делятся на 8, а 21 даёт остаток 5 при делении на 8. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

7. **Ответ**: нельзя.

Решение. Раскрасим клетки квадрата 10 х 10 (см. рисунок). Покрашена 3 + 11 + 19 + 13 + 5 = 51 клетка.



Заметим, что как бы мы не вырезали по клеточкам из покрашенной доски левую фигуру (1 х 4), она будет содержать 2 закрашенные клетки. Центральная фигура закроет 2 или 4 закрашенные клетки, а правая – 0, 2 или 4. Значит, все фигуры вместе должны содержать чётное количество закрашенных клеток. Но 51 нечётно.

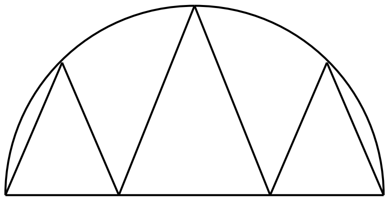


Одиннадцатый Северный математический турнир.

Командная блиц-олимпиада. Старшая лига. 5 марта 2021 года.

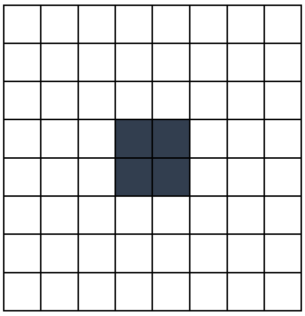
1. В классе 25 школьников. Любые двое из них или дружат, или относятся друг к другу нейтрально; дружба взаимна. Известно, что у каждого школьника в классе 8 друзей. Сколькими способами можно составить тройку школьников, в которой любые двое дружат друг с другом, или любые двое относятся друг к другу нейтрально?

2. Ломаная из шести звеньев расположена в полукруге как на рисунке. Горизонтальный диаметр образует со всеми звеньями ломаной равные углы. Найдите градусную меру этих углов.



3. Найдите наименьшее натуральное число, которое при зачёркивании первой цифры уменьшается в 57 раз.

4. Четыре центральные клетки шахматной доски занимает озеро (см. рисунок). Сколькими способами можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, не заходя в озеро? Разрешается перемещаться только на одну клетку вправо или на одну клетку вверх.



5. Найдите сумму [1000 / 2021] + [2000 / 2021] + ... + [1000 · 2020 / 2021].

6. На левом конце отрезка написано число 0, на правом конце – число 1. Каждую минуту посредине между каждыми двумя ближайшими числами пишется сумма левого ближайшего числа и удвоенного правого. Найдите сумму чисел через 7 минут.

7. Сколько существует пятизначных чисел, в которых чётные и нечётные цифры чередуются?

Указан верный ответ 4 балла, неверный ответ минус 1 балл, отсутствие ответа 0 баллов.

Жюри не знает, сможет ли оперативно ответить на вопросы участников по условиям, и рекомендует сначала решать задачи, по которым нет вопросов.

Одиннадцатый Северный математический турнир.
Командная блиц-олимпиада. Старшая лига. Решения.

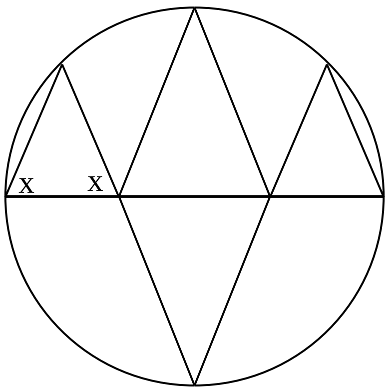
1. **Ответ**: 700.

Решение. Изобразим граф дружбы. Обозначим школьников точками. Соединим пары друзей красными отрезками, а остальные пары – синими отрезками. Из каждой точки (вершины графа) выходит 8 красных и 16 синих отрезков. Всего треугольников на рисунке $C_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 : 3! = 2300$.

Для того, чтобы найти количество одноцветных треугольников (именно его надо найти), найдём количество не одноцветных треугольников. Имеется $8 \cdot 16 = 128$ разноцветных углов с фиксированной вершиной. Так как всего вершин 25, и в каждый не одноцветный треугольник входит два разноцветных угла, количество не одноцветных треугольников равно $25 \cdot 128 : 2 = 1600$. Одноцветных треугольников $2300 – 1600 = 700$.

2. **Ответ**: $67{,}5^o$.

Решение. Отразим два центральных звена относительно диаметра полукруга. В треугольнике, расположенном в верхнем полукруге слева, два угла равны x. Оставшийся угол равен $180^o – 2x$. Дуга, на которую он опирается, с одной стороны, равна четверти окружности; с другой стороны, её градусная мера вдвое больше вписанного угла и равна $360^o – 4x$. Решая уравнение $360^o – 4x = 90^o$, находим $x = 270^o / 4 = 67{,}5^o$.



3. **Ответ**: 7125.

Решение. Пусть первая цифра равна n, количество остальных цифр равно k, а число без первой цифры равно y. Тогда $n10^k + y = 57y$, или $n10^k = 56y$. Так как правая часть равенства делится на 7, $n = 7$.
$y = 10^k / 8 = 125 \cdot 10^{k-3}$. Число имеет вид 712500...0; наименьшее число такого вида 7125.

4. **Ответ**: 982 способа.

Решение. Для каждой клетки, начиная с левого нижнего угла, напишем, сколькими способами в неё можно попасть. Число в клетке равно сумме левого и нижнего соседей (там, где нет соседей, считается, что стоят нули).

1	8	36	85	155	267	491	982
1	7	28	49	70	112	224	491
1	6	21	21	21	42	112	267
1	5	15			21	70	155
1	4	10			21	49	85
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

5. **Ответ**: 1 008 990.

Решение. Проверим, что НОД (2021, 1000) = 1. Воспользуемся алгоритмом Евклида
НОД (2021, 1000) = НОД (1000, 21) = НОД (21, 13) = НОД (13, 8) = НОД (8, 5) = НОД (5, 3) = НОД (3, 2) = НОД (2, 1) = 1.
$(1000 = 21 \cdot 47 + 13)$

Рассмотрим точки плоскости с целыми координатами (x, y) такие, что $0 \leq x \leq 2021$, $0 \leq y \leq 1000$. Исключим из рассмотрения те точки, что лежат на сторонах рассматриваемого прямоугольника. Проведём диагональ из вершины (0, 0) в вершину (2021, 1000) прямоугольника. Заметим, что ввиду взаимной простоты 2021 и 1000 ни одна точка с целыми координатами внутри прямоугольника не лежит на проведённой диагонали.

В каждой паре точек с целыми координатами, симметричных относительно центра прямоугольника, одна точка лежит выше проведённой диагонали, а другая ниже. Поэтому количество точек с целыми координатами внутри прямоугольника, лежащих ниже диагонали, равно $2020 \cdot 999 / 2 = 1008990$. Это число и является ответом.

В самом деле, $[1000 \cdot i / 2021]$ равно количеству точек с целыми координатами, абсцисса которых равна i, расположенных в рассматриваемом прямоугольнике ниже диагонали.

6. **Ответ**: 10923.

Решение. Сначала написаны числа 0 и 1. Через минуту появится число 2. Ещё через минуту появятся два числа 4. И т.д. Выпишем, в каком порядке располагаются числа в течение нескольких первых минут:

0	1							
0	2	1						
0	4	2	4	1				
0	8	4	8	2	10	4	6	1

Будем наблюдать за тем, как растёт сумма всех выписанных чисел. Сначала она равна 1, затем 3, затем 11, затем 43 и т.д. Докажем, что по прошествии n-й минуты сумма чисел $S_n = (2 \cdot 4^n + 1)/3$. В самом деле, после добавления новых чисел каждое из не крайних чисел прибавится трижды (дважды как правый сосед нового числа и один раз как левый сосед), а крайнее число 1 прибавится дважды.

Тогда $S_{k+1} = S_k + (3S_k - 1) = 4S_k - 1$. (1)
Заметим, что $S_n = (2 \cdot 4^n + 1)/3$ удовлетворяет соотношению (1):
$(2 \cdot 4^{k+1} + 1)/3 = 4(2 \cdot 4^n + 1)/3 - 1$ является тождеством. Конечно, необходимо проверить, что при $n = 1$ сумма чисел (в этот момент она $0 + 2 + 1$) равна $S_1 = (2 \cdot 4^1 + 1)/3$.

Осталось найти $S_7 = (2 \cdot 4^7 + 1)/3$.

7. **Ответ**: 5625.

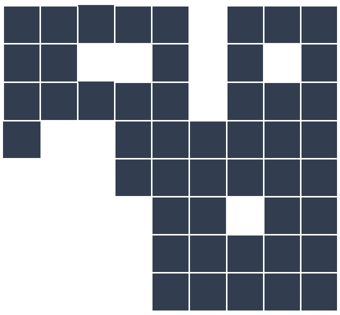
Решение. На первом месте может быть любая цифра, кроме 0; её можно выбрать 9 способами. На каждом следующем месте – цифра другой чётности по сравнению с предыдущей цифрой. Выбрать цифру нужной чётности можно 5 способами. Количество способов составить пятизначное число равно
$9 \cdot 5^4 = 5625$.

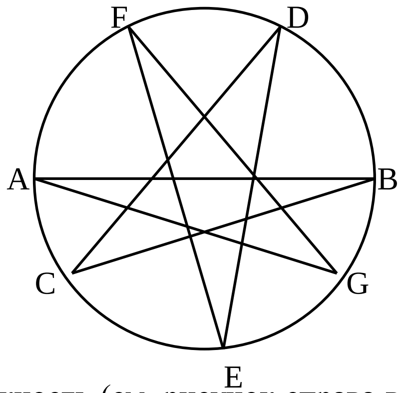
Одиннадцатый Северный математический турнир.
Командная блиц-олимпиада. Младшая лига. 5 марта 2021 года.

1. На доске 45 х 45 клеток, строки и столбцы которой занумерованы по порядку числами от 1 до 45, на каждой клетке лежит по одной конфете. Павел угощается конфетами следующим образом. За одно действие он либо берёт из одной строки две конфеты, номера столбцов которых отличаются на 3 или на 9, либо берёт из одного столбца две конфеты, номера строк которых отличаются на 3 или на 9. Павел может совершать любое количество действий, пока есть такая возможность. Какое наименьшее количество конфет может остаться на доске?

2. У Нади имеется 12 конфет, любые две из них разного сорта. Наде необходимо разбить конфеты на 6 пар. Сколькими способами она может это сделать?

3. На какое наименьшее количество прямоугольников можно разрезать фигуру, изображённую на рисунке слева? Каждый прямоугольник должен состоять из одной или нескольких клеточек.





4. Замкнутая семизвенная ломаная вписана в окружность (см. рисунок справа выше). Один из отрезков ломаной (AB) является диаметром окружности. Все остальные отрезки ломаной равны между собой. Найдите угол между отрезками AB и DE. Ответ запишите в градусах.

5. По шоссе из пункта А в пункт В в разное время отправились почтальон Печкин и велосипедист дядя Фёдор. Скорость Печкина 6 км/ч, скорость дяди Фёдора 18 км/ч. Почтальон вышел раньше, чем выехал дядя Фёдор, на 6 часов. Одновременно с дядей Фёдором из пункта А вылетел галчонок Хватайка со скоростью 24 км/ч. Догнав почтальона Печкина, галчонок развернулся и полетел к дяде Фёдору, а встретившись с дядей Фёдором, полетел к почтальону Печкину. Так он летал между ними, пока они одновременно не добрались до пункта В. Сколько километров пролетел галчонок Хватайка?

6. В числе 123456789 вычеркнули несколько цифр так, что число, получившееся после вычёркивания, делится на каждую из своих цифр. Найдите наибольшее возможное число, которое можно таким образом получить.

7. В алфавите племени Мумбо-Юмбо 10 букв. Словом называется любая последовательность из нечётного количества букв, среди которых нет одинаковых, отсортированная в алфавитном порядке. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Указан верный ответ 4 балла, неверный ответ минус 1 балл, отсутствие ответа 0 баллов.

Жюри не знает, сможет ли оперативно ответить на вопросы участников по условиям,
и рекомендует сначала решать задачи, по которым нет вопросов.

Одиннадцатый Северный математический турнир.
Командная блиц-олимпиада. Младшая лига. Решения.

1. **Ответ**: 9.

Решение. Пусть Павел берёт конфеты из одной строки из 1 и 4 столбцов, пока есть такая возможность. Затем – из 2 и 5 столбцов. Затем – из 3 и 6 столбцов. Действуя таким образом, он возьмёт все конфеты в первых шести столбцах. Затем в следующих шести и т.д. В оставшихся трёх столбцах Павел будет брать конфеты, расположенные в одном столбце – самую нижнюю и ту, у которой номер строки на 3 больше. Останется 9 конфет на пересечении 43-й, 44-й, 45-й строк и 43-го, 44-го, 45-го столбцов.

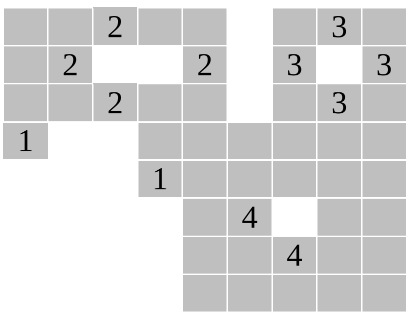
Докажем, что меньше 9 конфет остаться не может. Разделим доску на квадраты 3 x 3 и покрасим квадраты в два цвета в шахматном порядке. Какого-то цвета получится на один квадрат (т.е. на 9 клеток) больше. Павел берёт конфеты с клеток разного цвета. Поэтому останется не меньше 9 конфет на клетках того цвета, которого больше.

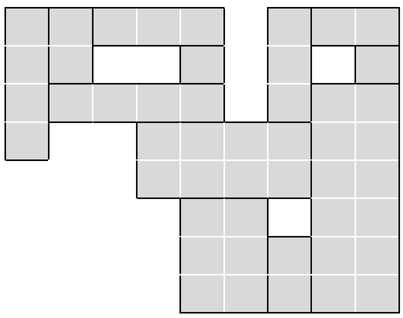
2. **Ответ**: 10395.

Решение. Занумеруем конфеты числами от 1 до 12. Для конфеты №1 пару можно выбрать 11 способами (в пару можно взять любую из остальных конфет). Пусть пара с участием конфеты №1 составлена. Осталось 10 конфет. Рассмотрим конфету с наименьшим номером (из оставшихся без пары). Для неё можно подобрать пару 9 способами (в пару можно взять любую из остальных конфет, не имеющих пары). Пусть вторая пара также составлена. Осталось 8 конфет. Продолжая таким же образом составление пар, получим, что количество способов составить пары равно $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10395$.

3. **Ответ**: 12.

Решение. Рассмотрим клетки, отмеченные числами на левом рисунке. Заметим, что они должны находиться в разных прямоугольниках. Поэтому прямоугольников не меньше 12. Пример разрезания на 12 прямоугольников на правом рисунке.





4. **Ответ**: 75^o.

Решение. Заметим, что градусная мера верхней полуокружности AB 180 градусов. Пусть градусная мера дуги BGEC x градусов. Из того, что по условию хорды равны, следует, что дуги также равны. Градусные меры дуг CAFD, DBGE, ECAF, FDBG, GECA также по x градусов. Все перечисленные дуги вместе составляют три полные окружности. Поэтому $180^o + 6x = 3 \cdot 360^o$, а значит, $x = 150^o$.

Градусная мера дуги ACE равна ᴗAC + ᴗCE = (360^o - ᴗAFDB - ᴗBGEC) + (360^o - ᴗCAFD - ᴗBBGE) = 30^o + 60^o = 90^o, градусная мера дуги DB равна 360^o - ᴗCAFD - ᴗBGEC = 60^o.
Искомый угол равен (ᴗACE + ᴗDB) / 2 = 75^o.

5. **Ответ**: 72 км.

Решение. Дядя Фёдор догонял почтальона Печкина со скоростью 12 км/ч. Так как почтальон Печкин вышел на 6 часов раньше, за это время он ушёл вперёд на 36 км, и дядя Фёдор догнал его через 3 часа. За время в полёте галчонок Хватайка пролетел 72 км.

6. **Ответ**: 1368.

Решение. Заметим, что если в числе осталась цифра 5, то она должна быть на конце, а значит, в числе нет цифр 6, 7, 8, 9. Так как последняя цифра числа 5, в числе нет и цифр 2, 4. В этом случае максимально возможное число 135.

Пусть в числе нет цифры 5. Если есть цифра 9, то число нечётно, а значит, в нём нет чётных цифр 2, 4, 6, 8. Остались цифры 1, 3, 7, 9. Из того, что может образоваться после вычёркивания из числа 1379, на 9 по признаку делимости делится только число 9.

Пусть в числе нет цифр 5 и 9. Выясним, есть ли цифра 8. Пусть она есть. Тогда число делится на 4, а значит, перед 8 находится чётная цифра, и цифры 7 нет. Эта чётная цифра может быть 2 (максимально возможное число 128), 4 (максимально возможное число 1248), 6. В последнем случае для делимости на 8 перед цифрой 6 должна быть нечётная цифра. Такой цифрой может быть 1 (максимально возможное число 168) или 3 (максимально возможное число 1368).

Пусть цифры 8 также нет. Остались цифры 1, 2, 3, 4, 6, 7. Если цифра 7 осталась, то число нечётно, а значит, в нём нет чётных цифр 2, 4, 6. В этом случае остались цифры 1, 3, 7, и максимально возможное число 7.

Пусть цифра 7 также отсутствует. Можно проверить, что из оставшихся цифр 1, 2, 3, 4, 6 можно получить лишь одно 4-значное число, которое делится на все свои цифры. Это число 1236. В самом деле, если присутствуют обе цифры 4 и 6, число не делится на 4. Число 1234 не делится на 3 и на 4.

Из максимально возможных чисел для каждого случая (135, 9, 128, 1248, 168, 1368, 7, 1236) находим самое большое. Это число 1368.

7. **Ответ**: 512.

Решение. Выпишем все буквы по алфавиту: $Б_1Б_2...Б_{10}$. Если бы любая отсортированная по алфавиту последовательность букв считалась словом, слов было бы $2^{10} = 1024$. В самом деле, для каждой из 10 букв две возможности – она либо войдёт в слово, либо нет; если войдёт, то её место в слове полностью определяется набором букв, которые войдут в слово.

Докажем, что отсортированных последовательностей нечётной длины ровно половина, откуда и будет следовать ответ (1024 : 2 = 512). Способов составить отсортированную последовательность из 9 букв $Б_1$, $Б_2$, ..., $Б_9$ имеется 512. Если в последовательность включено чётное количество букв с номерами не больше 9, букву $Б_{10}$ добавить необходимо; в противном случае её добавить нельзя. Т.е. для буквы $Б_{10}$ всегда одна возможность по добавлению её в последовательность. Ответ $2^9 \cdot 1 = 512$.