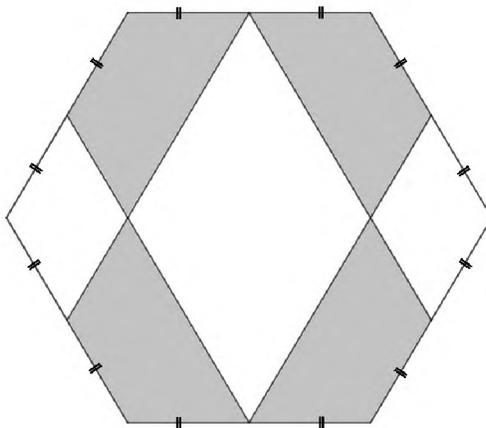


# «Шаг в математику» — условия

## Устная олимпиада

- (1 балл) Найдите по крайней мере одно решение ребуса  $ЛИС - НОС = СОМ$  (т.е. замените буквы цифрами так, чтобы получилось верное равенство). Разные буквы обозначают разные цифры.
- (2 балла) На столе лежит 2022 монеты решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 17 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх?
- (2 балла) Школьник Вова получил табель с четвертными оценками. Когда он сложил все семь оценок, он понял, что сумма совпадает с возрастом его папы. Придя домой, Вова сразу же рассказал об этом родителям, после чего Вовин папа догадался, какую оценку получил его сын по каждому предмету. Сколько лет Вовиному папе?
- (2 балла) Взяли четыре числа (не обязательно целых) и выписали на доску все их попарные суммы. Могли ли выписать числа 3, 4, 4, 5, 6, 8?
- (3 балла) Петя и Вася написали в тетради число 11032022. За ход нужно вычестить из последнего написанного числа какую-либо его ненулевую цифру и написать получившееся число в тетрадь. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто победит при правильной игре, если Петя ходит первым?
- (3 балла) Найдите все такие наборы из пяти положительных чисел, что сумма каждых трёх чисел набора равна произведению двух оставшихся.
- (4 балла) Вася задумал пятизначное число. Известно, что оно является полным квадратом, делится на 3 и в его записи содержится хотя бы 3 двойки и хотя бы 1 семёрка. Найдите это число и докажите, что другого быть не могло.
- (3 балла) Найдите, какую часть правильного шестиугольника составляет закрашенная часть.



# «Шаг в математику» — решения

## Устная Олимпиада

1. (1 балл) Найдите по крайней мере одно решение ребуса ЛИС – НОС = СОМ (т.е. замените буквы цифрами так, чтобы получилось верное равенство). Разные буквы обозначают разные цифры. (П. Цишевич)

**Ответ:** Например,  $921 - 761 = 160$ .

**Комментарий:** Всего существует 92 решения.

2. (2 балла) На столе лежит 2022 монеты решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 17 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх?

**Ответ:** Можно.

**Решение:** Существует много способов добиться желаемого, ниже описан один из них.

Положим 2022 монеты по кругу и начнем переворачивать по 17 монет, лежащих подряд. То есть сначала перевернуть монеты с 1ой по 17ую, затем, со 2ой по 18ую и т.д. Последнее переворачивание будет начинаться с 2022ой монеты и заканчиваться 16ой. В результате всех операций, каждая монета перевернется ровно 17 раз.

3. (2 балла) Школьник Вова получил табель с четвертными оценками. Когда он сложил все семь оценок, он понял, что сумма совпадает с возрастом его папы. Придя домой, Вова сразу же рассказал об этом родителям, после чего Вовин папа догадался, какую оценку получил его сын по каждому предмету. Сколько лет Вовину папе?

**Ответ:** 35 лет.

**Решение:** Если бы в таблице были хотя бы две различные оценки, то их можно было бы поменять местами и Вовин папа не смог бы наверняка понять, какая оценка какому предмету соответствует. Если же все оценки равны, но при этом не 5 и не 1, то всегда есть возможность одну оценку увеличить на 1, а другую уменьшить на 1, то есть будет существовать другой вариант оценок с такой же суммой. Значит, Вова получил либо семь единиц, либо семь пятерок. Поскольку Вовину папе не может быть 7 лет, то ему 35.

4. (2 балла) Взяли четыре числа (не обязательно целых) и выписали на доску все их попарные суммы. Могли ли выписать числа 3, 4, 4, 5, 6, 8?

**Ответ:** Не могли.

**Решение:** Обозначим исходные числа  $a, b, c$  и  $d$ . Предположим, что на доске были выписаны числа 3, 4, 4, 5, 6 и 8. Тогда 8 и 3 — сумма двух наибольших и двух наименьших из них, соответственно. Поэтому  $a + b + c + d = 11$ . Если 4 — сумма двух каких-то чисел, то сумма двух оставшихся равна 7, но числа 7 среди сумм нет. Противоречие.

5. (3 балла) Петя и Вася написали в тетради число 11032022. За ход нужно вычесть из последнего написанного числа какую-либо его ненулевую цифру и написать получившееся число в тетрадь. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто победит при правильной игре, если Петя ходит первым?

**Ответ:** Выиграет Петя.

**Решение:** Первым своим ходом Петя должен вычесть 2 из числа и получить 11032020. Далее, когда Вася будет вычитать из числа какую-либо его ненулевую цифру, в разряде единиц обязательно будет получаться не ноль, тогда Пете достаточно вычитать из числа его последнюю цифру, чтобы снова получить ноль на конце. Таким образом, после любого хода Пети число будет делиться на 10, а после хода Васи не будет. Также заметим, что после каждого хода полученное число будет строго меньше предыдущего, поэтому в какой-то момент получится 0. Поскольку 0 делится на 10, то победит Петя.

6. (3 балла) Найдите все такие наборы из пяти положительных чисел, что сумма каждых трёх чисел набора равна произведению двух оставшихся.

**Ответ:** Все числа равны 3.

**Решение:** Обозначим числа  $a, b, c, d$  и  $e$ . Поскольку  $a + c + d = be$  и  $b + c + d = ae$ , то  $(a - b) = be - ae = (b - a)e$ . Так как все числа положительны, это равенство выполняется только при  $a = b$ .

Аналогично доказывается равенство остальных чисел. Следовательно,  $3a = a^2$ . Учитывая положительность, получаем, что  $a = b = c = d = e = 3$ .

7. (4 балла) Вася задумал пятизначное число. Известно, что оно является полным квадратом, делится на 3 и в его записи содержится хотя бы 3 двойки и хотя бы 1 семёрка. Найдите это число и докажите, что другого быть не могло.

(А. Лукьянов)

**Ответ:**  $27225 = 165^2$

**Решение:** Полный квадрат может заканчиваться только на цифры: 0, 1, 4, 5, 6, 9, значит, он не может оканчиваться ни на двойку, ни на семёрку. Раз квадрат делится на 3, то он делится и на 9, потому что все простые сомножители входят парами в полный квадрат.

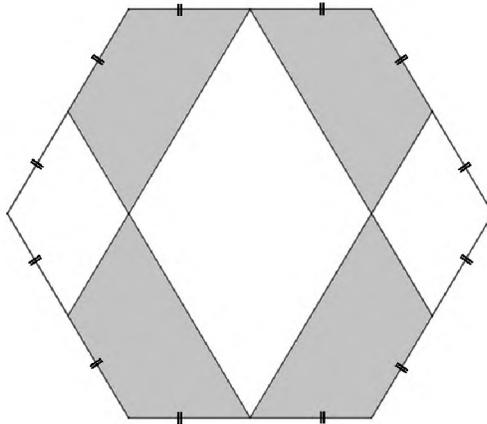
Из признака делимости на 9 следует, что сумма цифр Васиного числа должна делиться на 9:  $2+2+2+7 = 13$ , значит, недостающая цифра равна 5, так как это

единственная цифра, которая дополнит сумму до числа, делящегося на 9.

Так как ни 2, ни 7 не могут быть концом полного квадрата, то последней цифрой будет 5. У нас остаётся всего 4 варианта, каким могло быть число: 72225, 27225, 22725, 22275. Нетрудно убедиться, что среди них единственный полный квадрат —  $27225 = 165^2$ .

**Комментарий:** Можно было обойтись без делимости на 9: раз наш полный квадрат делится на 3, то и сумма цифр делится на 3. Всего 3 цифры могут дополнить сумму цифр числа до делимости на 3: 2, 5, 8. Заметим, что ни 2, ни 8 не подходят, потому что тогда среди цифр Васиного числа нет той, которая может быть концом полного квадрата.

8. (3 балла) Найдите, какую часть правильного шестиугольника составляет закрашенная часть.



**Ответ:** 0.5.

**Решение:** Поделим правильный шестиугольник на шесть правильных треугольников, соединив его центр с его вершинами. Каждый из полученных правильных треугольников делится еще на четырех правильных треугольника меньшего размера путем проведения средних линий. В результате, исходный правильный шестиугольник окажется поделен на 24 одинаковых правильных треугольника, ровно половина из которых окажется закрашена.

