ГБУ ДО Центр “Интеллект”
Олимпиада по математике, 6 класс
2022 г.
Решения и критерии проверки

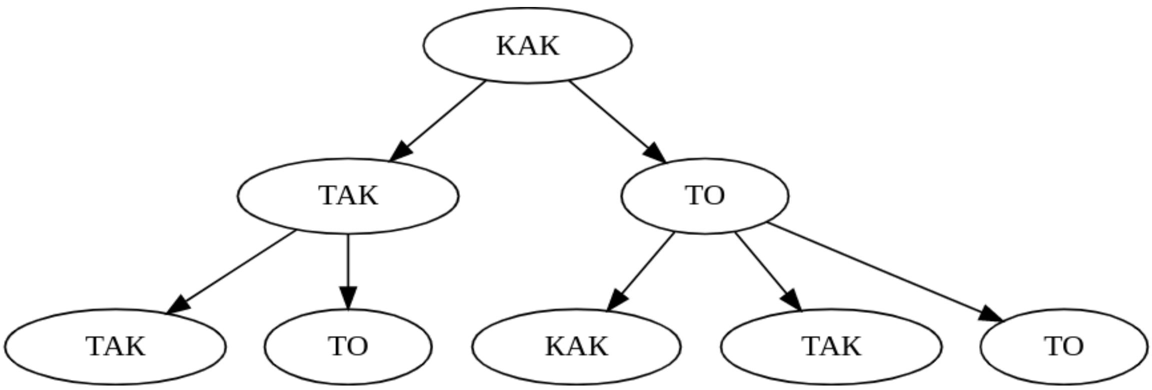
Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 42.

Общие критерии оценивания решений.

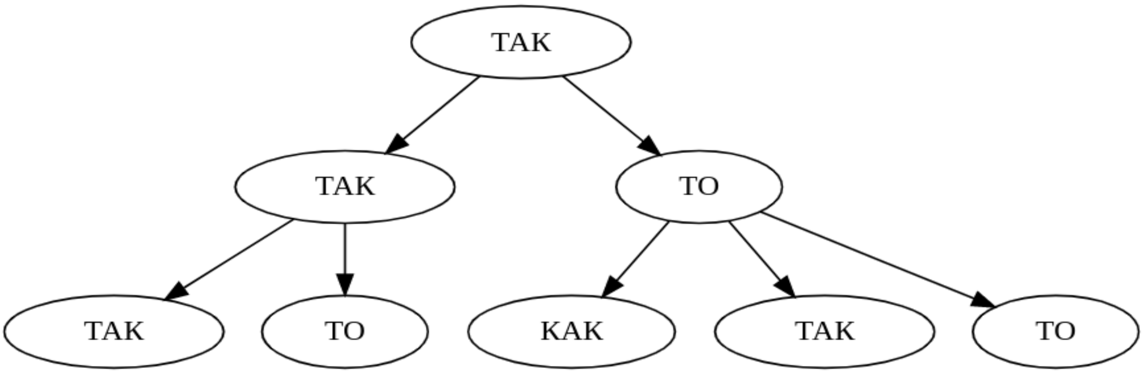
Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. В языке племени «Как-то так» всего три слога: КАК, ТАК и ТО. Словом в этом племени считается любая последовательность из трех слогов, в которой нет двух одинаковых букв, идущих подряд. Сколько слов в языке этого племени?

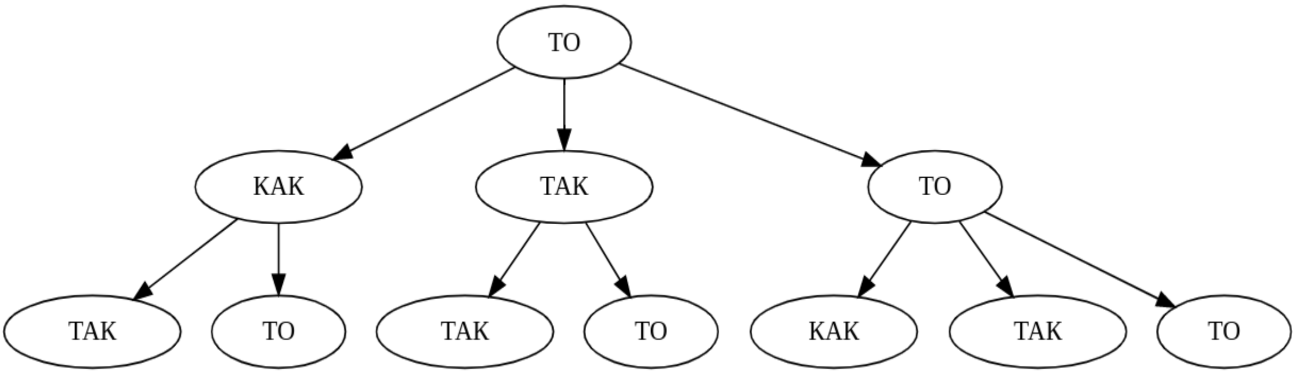
   Решение. Посчитаем количество слов, начинающихся со слога «КАК»:



   Их всего 5. Теперь найдем количество слов, начинающихся со слога «ТАК»:



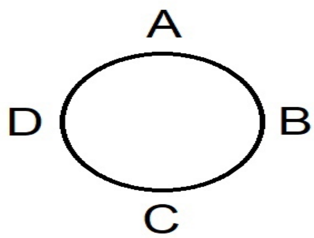
Их тоже 5. Осталось найти количество слов, начинающихся со слога «ТО»:



Их оказалось 7. Всего слов $5 + 5 + 7 = 17$.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Перечислены все слова, но не доказано, что других нет — 5 баллов. Описана структура перебора слов, но перечислены не все слова — 4 балла.

2. Как-то раз за круглым столом собрались рыцарь, лжец, вредина и повторюша (см. рисунок). Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда врет. Вредина говорит правду, если высказывание перед ним было ложным, и врет, если перед ним сказали правду. А повторюша, наоборот, говорит правду после правды и врет после лжи. Если вредина говорит первым, то он врет, а если повторюша говорит первым, то он говорит правду. Между ними развернулся следующий диалог: A: «Напротив меня сидит вредина». B: «A сказал правду». C: «Рыцарь сидит напротив». D: «C не соврал». Определите, кто кем является.



Решение 1. Если D сказал правду, значит и C сказал правду (по правдивости высказывания D). Из правдивости высказывания C следует, что A рыцарь, то есть тоже говорит правду. Но тогда и B говорит правду (поскольку A сказал правду). Получается, что все 4 человека сказали правду. Но среди них должен быть лжец, который всегда лжет. Противоречие. Значит, D сказал неправду, следовательно, и C сказал неправду, покуда высказывание D ложно. Из ложного высказывания C следует, что A не рыцарь. Значит, рыцарем может быть только B, так как A рыцарем не является, а другие соврали. A является или повторюшей, или врединой, потому что он сказал правду, но не является рыцарем. Так как A высказался первым и не соврал, то врединой он быть не может, значит A — повторюша. C и D солгали, следовательно, D не вредина, так как вредина не может солгать следом за ложью C. Остаётся, что C — вредина, D — лжец, что удовлетворяет условию.

Решение 2. Можно заметить, что если A соврал, то и B соврал, а если A сказал правду, то и B тоже сказал правду. То есть, либо и A, и B оба сказали правду, любо оба солгали. Аналогично получаем, что C и D тоже либо оба врут, либо оба говорят правду. Так как за столом сидит рыцарь, то хотя бы одна пара говорит правду, а из-за наличия лжеца, хотя бы одна пара должна лгать. Значит, есть ровно одна пара, которая врет, и ровно одна пара, говорящая правду. Если предположить, что пара C и D говорит правду, то A — рыцарь, но тогда и пара A и B говорит правду, противоречие. Получается, что вторая пара лжет, а первая говорит правду. Так как A говорит правду, то C — вредина. Лжец входит во вторую пару, значит, D — лжец. Поскольку C лжет, то A не рыцарь, значит, A — повторюша, а B — рыцарь.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Правильно обоснована роль некоторых людей, но решение не доведено до конца — по 2 балла за каждого человека. Только правильный ответ — 2 балла.

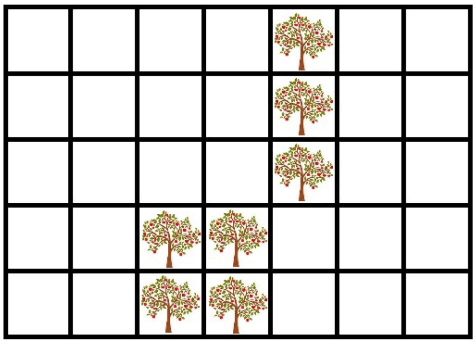
3. Руслан назвал число, Саша прибавил к нему 5 и записал на доске, Паша прибавил к числу, которое назвал Руслан, 2 и тоже записал на доске. В итоге на доске написаны два числа, и они отличаются в два раза. Какие это числа?

   Решение. Заметим, что Сашино число на 3 больше Пашиного числа (а Пашино — на 3 меньше Сашиного). Рассмотрим два случая:

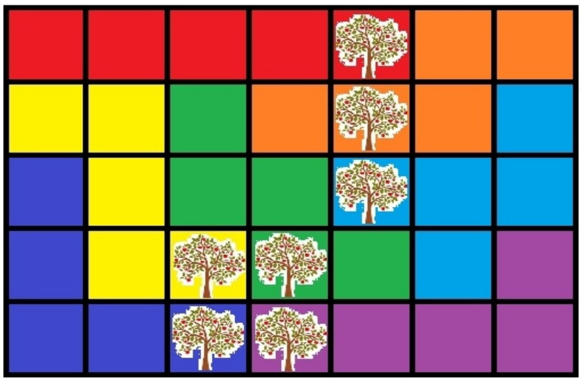
   - Сашино число равно удвоенному Пашиному числу. Тогда Сашино число может быть получено из Пашиного числа двумя способами: прибавлением 3 или прибавлением Пашиного числа. Значит, Пашино число равно 3, а тогда Сашино равно 6.
   - Пашино число равно удвоенному Сашиному числу. Тогда Пашино число может быть получено из Сашиного числа двумя способами: вычитанием 3 или прибавлением Сашиного числа. Значит, Сашино число равно -3, а тогда Пашино число равно -6.

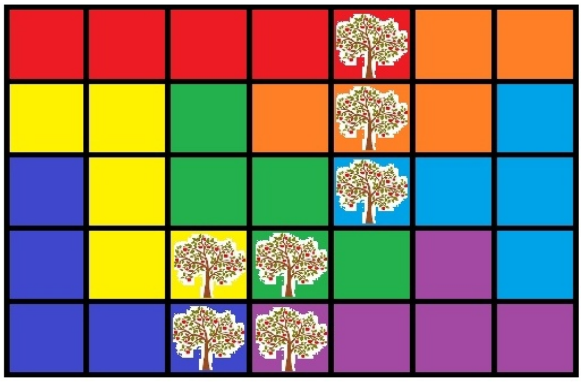
   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Найдены только положительные числа — 5 баллов. Только правильный ответ — по 1 баллу за случай.

4. У царя есть сад, в котором растут вишневые деревья (см. рисунок). Однажды царь решил разделить свой сад между сыновьями (которых больше одного) так, чтобы каждому сыну достался участок одинаковой площади и с одинаковым числом вишневых деревьев. Разделите сад по границам клеток между сыновьями так, чтобы всем достались участки разной формы. Участки считаются разными, если их невозможно совместить с помощью поворотов, отражений и переносов.



Решение. Поскольку в саду растет семь вишневых деревьев, а 7 — число простое, количество участков должно быть равно 7. Значит, каждый участок должен состоять из пяти клеток. На рисунках приведены два способа разделить сад.





Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Пример не построен, но доказано, что участков должно быть 7, или доказано, что площадь участка равна равна 5 клеткам — 2 балла.

5. В лесу 110 кормушек. В каждой из них лежит ненулевое число зёрен, все зёрна целые. Известно, что есть кормушки, в которых лежит по 1, 3, 5, …, 99 (любое нечётное от 1 до 99) зёрен. Также известно, что для любой кормушки в пару ей найдётся такая, что вместе в них 101 зерно. Сколько максимально зёрен суммарно лежит во всех кормушках?

Решение. Так как есть кормушка с 1 зерном, в пару ей должна быть кормушка и со 100 зёрнами; есть кормушка с 3 зёрнами, значит есть и с 98, есть с 5 – есть и с 96. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что имеются кормушки с 100, 98, 96, …, 2 зёрнами. Следовательно, имеются кормушки с 1, 2, 3, …, 98, 99, 100 зёрнами.

Так как требуется максимальное количество зёрен, в оставшихся 10 кормушках должно находиться 100 зёрен: больше 100 мы положить не сможем, так как тогда для неё не найдётся кормушки, что вместе в них 101 зерно. В пару же для кормушки со 100 зёрнами у нас уже точно есть кормушка с 1 зерном. Значит, при условии, что количество зёрен максимально, в лесу находились кормушки с 1, 2, 3, …100 зёрнами и ещё 10 кормушек со 100 зёрнами. Сосчитаем, сколько их было всего:

$$(1 + 2 + \cdots + 99 + 100) + 10 \cdot 100 = \,?$$

Сосчитаем выражение в скобках:

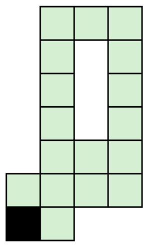
$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + 99 + 100}_{1+100=101} = (1 + 100) + \underbrace{(2 + 3 + \cdots + 98 + 99)}_{2+99=101} = \cdots =$$

$$= \underbrace{(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51)}_{\text{в каждой из 50 скобок сумма равна 101}} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

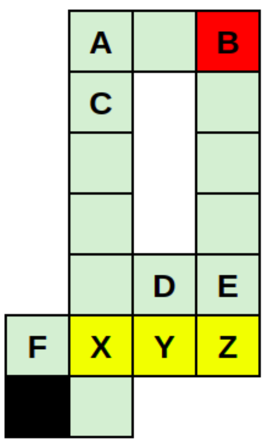
Итого получаем $5050 + 10 \cdot 100 = 6050$.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Построен правильный пример, доказана его оптимальность, но ответ дан в виде суммы — 5 баллов. Построен правильный пример, но не доказана его оптимальность — 4 балла. Доказано, что есть кормушки, в которых лежит 2, 4, …, 100 зерен — 2 балла.

6. Петя и Вася играют в игру на поле, изображенном на рисунке. За ход игрок должен передвинуть фишку на несколько клеток (может быть, одну) либо вверх, либо вправо. Первым ходит Петя. Изначально фишка стоит на чёрной клетке. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто из ребят выиграет при любой игре соперника?



Решение. Введём обозначения для некоторых клеток поля (см. рисунок). Обозначим красным цветом «проигрышную клетку», то есть клетку, из которой некуда ходить. Ясно, что из остальных клеток можно совершить ход либо вверх, либо вправо.



Докажем, что Петя всегда может выиграть. Для этого покажем, как он должен действовать, чтобы точно одержать победу. Первым ходом Петя должен передвинуть свою фишку в клетку F. После этого Васе ничего не остаётся, кроме как передвинуть фишку в одну из жёлтых клеток. Рассмотрим 3 случая:

- Вася пошёл в клетку X, то Пете достаточно перейти в клетку C. Дальше Вася может походить лишь на 1 клетку вверх — в клетку A. Следующим ходом Петя просто становится на красную клетку и Вася проигрывает на своём ходе.
- Вася пошёл в клетку Y, то Пете надо идти на 1 клетку вверх — в клетку D. Васе остаётся походить лишь на 1 клетку вправо – в клетку E. Следующим ходом Петя становится в красную клетку.
- Вася пошёл в клетку Z, то Пете достаточно встать на красную клетку и одержать победу.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Доказано, что первый ход Пети вправо приводит к его проигрышу — 2 балла. Верно рассмотрены случаи ответного хода Васи на правильный первый ход Пети, но решение не доведено до конца — по 2 балла за каждый случай.