Шифр: С-14

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2017/2018
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОУ „Лицей №1"

Класс 11

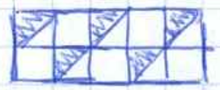
ФИО Дементьев Юрий

Ильич

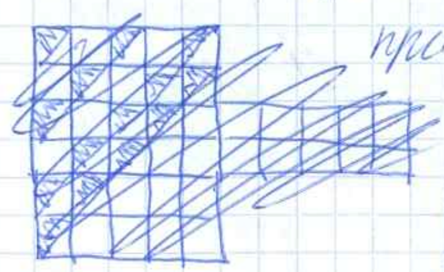
пересечениях. Значит, строк, у которых на пересечениях с двумя столбцами стоит 2 нуля не меньше чем $1001-n-(1000-2n) = 1+n = n+1 > n$.

Ответ: обязательно.

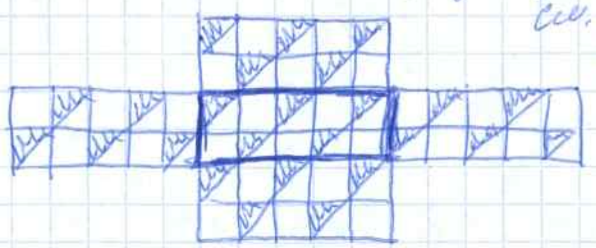
11.5) Рассмотрим участок поля 5×2



При такой раскраске в нём нельзя поставить лодочку так, чтобы она не накладывалась на закрашенную часть.



Как видно из рисунка ниже, при такой раскраске лодочку нельзя поставить и на границе двух участков, см. дальше →

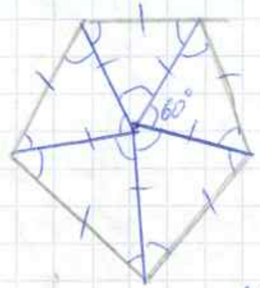


Ответ: 5000.

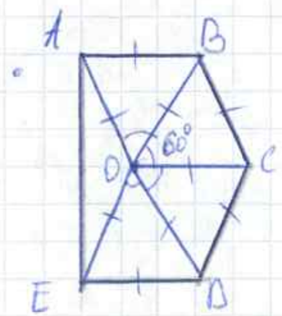
1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	0	14

11.1) • Сумма углов выпуклого 5уг-ка $= 180°(n-2) = 180° \cdot (5-2) = 540°$.

• Предположим, что все десять отрезков имеют длину $= 1$, тогда сумма углов 5уг-ка $= 5 \cdot (180° - 60°) = 600° / 540°$ (получается 5 правильных Δ-ов со стороной $= 1$), что невозможно $\Rightarrow$ не более 9 отрезков могут быть равны 1.



• Реализация с девятью отрезками $= 1$ показана слева. $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOE$ – правильные Δ с общей вершиной O и стороной $= 1$.



$AB = BC = CD = DE = AO = BO = CO = DO = EO = 1$.

$\angle AOE = 360° - 60° \cdot 4 = 120°$; $AE = \sqrt{AO^2 + OE^2 - 2AO \cdot OE \cos 120°} = \sqrt{3} \neq 1$

$\left.\begin{array}{l} \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 120° \\ \angle DEA = \angle EAB = 60° + \frac{180° - 120°}{2} = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow$ 5уг-к. ABCDE выпуклый.

Ответ: 9.

№ 11.2) В каждом столбце 1001 клетка

• В каждом столбце 0-ей больше, чем 1-иц, значит, единиц не больше 500, т.к. в противном случае: 1-ц: $500 + k$; $k \in \mathbb{N}$
0-ей: $1001 - (500 + k) = 501 - k$

$501 - k \leq 500 < 500 + k$.

0-ей меньше, чем единиц.

• Возьмём 2 различных столбца таблицы. Пусть у них число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы $= n$. $n \leq 500$, т.к. единиц в каждом столбце ≤ 500. Тогда остаётся $1001 - n$ строк. У каждой из них в пересечении с двумя столбцами стоят либо 2 нуля, либо нуль и единица. Строк, в которых на пересечениях стоят нуль и единица может быть не больше чем $2 \cdot (500 - n) = 1000 - 2n$, т.к. в каждом столбце не больше 500 единиц, n из которых стоят в строках, где по 2 единицы на

C-14

→ 1(5) Продолжение

Такими участками можно замостить всё поле, и тогда нельзя будет ~~не~~ никуда поставить лодочку, чтобы она не накрыла закрашенной части, т.е. гарантированно при выстреле лодочка потонет.

Участков $\frac{100 \cdot 100}{5 \cdot 2} = 1000$.

На каждом по 5 выстрелов (закрашенных половинок клеток)

Итого $1000 \cdot 5 = 5000$

Ответ: 5000

- Всего на поле $10000 \cdot 2 = 20000$ половинок клеток
- Для лодочки нужно 4 половинки клеток

⇒ Нужно $\geq \frac{20000}{4} = 5000$ выстрелов, чтобы гарантированно её потопить.

3) Д-м : $KO = KB$

Чет-к $ABCD$ - вписанный в окр Ω $\Rightarrow \angle ADC =$
$= 180^\circ - \angle ABC = 45^\circ$

4.) $\angle$ $\triangle KBD$, $\angle KOB = \angle KOD$.

$\angle KBO = \angle ABC - \angle CBO + \angle KBA =$
$= 135^\circ - \angle CBO + \angle KBA$

11.4.) Ответ: не могут.

Докажем, что это невозможно.

Возможно 3 случая:

I). Из 3-х ~~в~~ иррац. $\Rightarrow$ в 3 ~~ир~~ рац. за 1 ход

II) Из 2-х рац. и 1 иррац $\Rightarrow$ в 3 рац. за 1 ход.

III) Из 1 рац. и 2-х иррац $\Rightarrow$ в 3 рац. за 1 ход

II) Не умаляя общности, можно считать, что $x \in \mathbb{Q}$; $y \in \mathbb{Q}$; $z \notin \mathbb{Q}$.

Предп-м, что возможно

(1) $x^2 + xz + z^2 = R_1$

(2) $y^2 + yz + z^2 = R_2$

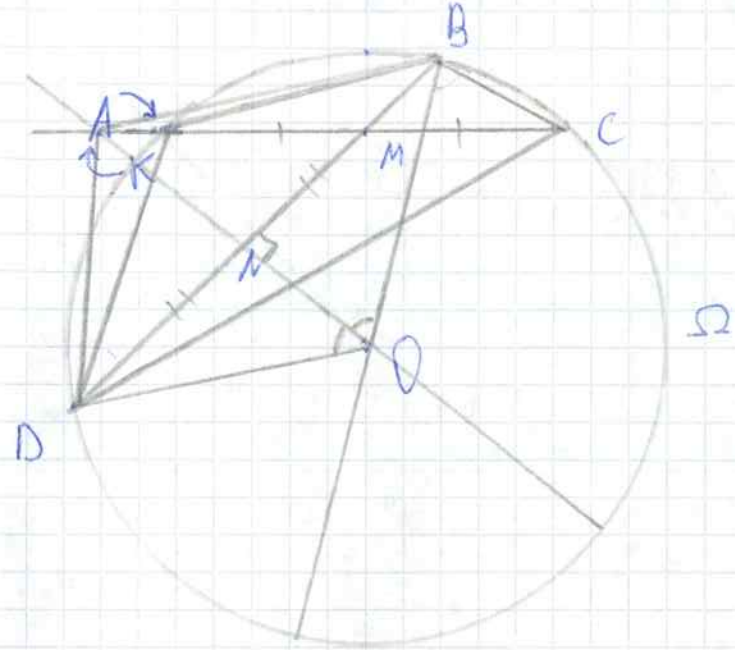
~~3~~ $x^2 + xy + y^2 = R_3$, где R_1, R_2, R_3 - рац. числа

(1)-(2): $x^2 - y^2 + z(x-y) = R_1 - R_2$

$\underbrace{z(x-y)}_{\text{иррац}} = \underbrace{R_1^2 - R_2^2 + y^2 - x^2}_{\text{рац.}}$ ~~Про~~ Противоречие, т.к. произв. иррац и рац чисел иррационально.

I)

11.3)



1) Проведём отрезки OD и OB; $\triangle OBD$ - равноб. ($OB = OD = R_\Omega$); В $\triangle OBD$ проведем медиану ON; $N \in BD$. ON - высота и бисс. $\triangle BOD \Rightarrow$
I - центр опис. окр. Γ $\triangle BOD \in ON$, т.к. ON - сер. пер. к. BD;

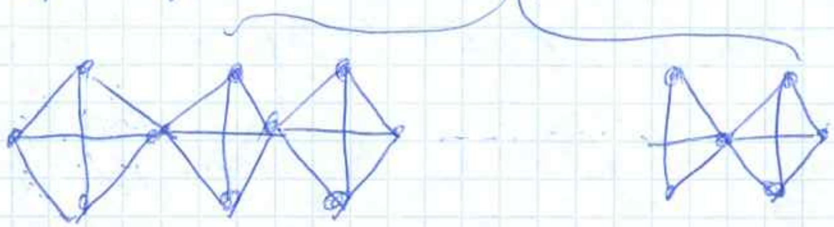
2) $ON \cap AC = K$

$KB = KD$, т.к. $K \in ON$. (ON - множ-во точек, равноуд. от точек B и D).

т.е. каждый ребенок должен присутствовать не менее, чем в 2-х 3-ках, и иметь не менее 3-х друзей. Значит, всего пар друзей $\geq \frac{3\cdot 100}{2} = 150$.

Пример.

32



$100-4=96$; $\frac{96}{3}=32$

$\frac{6\cdot 33}{\cancel{2}} = 180+18=198$

Ответ: 198.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	1	0	15

11.6) $n\in\mathbb{N}$; $d\in\mathbb{N}$

$n \vdots d \Leftrightarrow n=d\cdot k$; $k\in\mathbb{N}$

Каждую из n дробей можно записать в виде $\frac{i}{n-i}$, где $i\in\{0;1;2;\dots n-1\}$

Решим ур-е $\frac{i}{n-i}=d-1$ относительно i

$\frac{i}{d\cdot k-i}=d-1$ $\quad (d\cdot k=n>i \Rightarrow n-i>0$

$i=(d-1)(d\cdot k-i)$

$i=d^2\cdot k-dk-di+i$

$di=d^2\cdot k-dk$ $\quad n=d\cdot k$

$i=d\cdot k-k$ $\quad \frac{n}{k}=d$; $d\in\mathbb{N}$

$i=n-k$ $\quad d\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n\geq k \Rightarrow n-k\geq 0$

$k\in\mathbb{N}$; $k\geq 1 \Rightarrow n-k\leq n+1$ $\Big\}$

$\Rightarrow i=n-k\in\{0;1;2;\dots,n-1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ дробь $\frac{n-k}{n-(n-k)} = \frac{k(d-1)}{k} = d-1$ принадлежит ~~в~~ ряду выписанных дробей.

11.7) $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Ф-я f задана на всей числовой оси и удовл. данному условию при всех $x\in R$; $y\in R$

- $f(-x)+f(-y)=2f\left(\frac{-x-y}{2}\right)\cdot f\left(\frac{y-x}{2}\right)$.

(1) $f(-x)=2f\left(\frac{-x-y}{2}\right)\cdot f\left(\frac{y-x}{2}\right)-f(-y)$

- $f(x)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x-y}{2}\right)-f(y)$

(2) $f(-x)=2f\left(\frac{y-x}{2}\right)f\left(\frac{-x-y}{2}\right)-f(y)$

Из (1) и (2) получаем:

$2f\left(\frac{-x-y}{2}\right)f\left(\frac{y-x}{2}\right)-f(-y)=2f\left(\frac{y-x}{2}\right)f\left(\frac{-x-y}{2}\right)-f(y)$

$f(y)=f(-y)$, где y - ~~т.д.~~ любое действительное число из ~~т.~~ $D(f)=R$ $\Rightarrow$

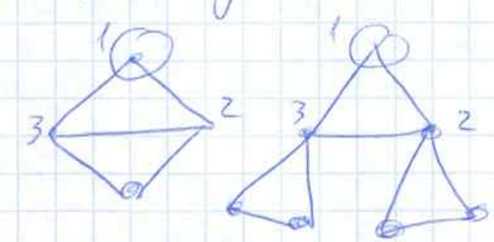
$\Rightarrow$ Ф-я $f(x)$ - обязательно чётная при данных условиях. Ответ: верно.

11.9) Для того, чтобы любых 99 из 100 детей можно было разбить на 3-ки, в которых дети попарно дружат, нужно, чтобы каждый ребёнок входил хотя бы в одну такую 3-ку.

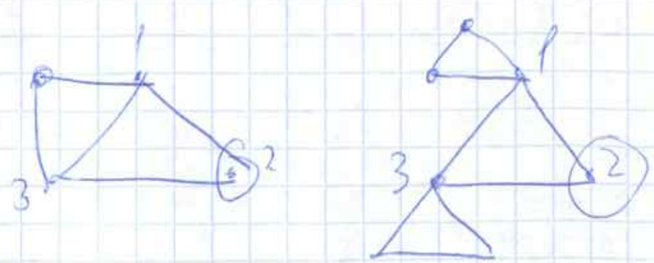
Рассмотрим 3-ку попарно дружащих детей. В ней у каждого ребёнка по 2 друга и $\frac{2\cdot 3}{2}=3$ пары друзей.

точки - дети
рёбра - соединяют дружащих детей.

Если выбрать одного из них, то 2 других должны попасть в новую тройку либо в 2 новые тройки:



Аналогично, если выбрать 2-го ребёнка



C-14

11.8.) $10^{2018} = 2^{2018} \cdot 5^{2018} = 2^{2018} \cdot 25 \cdot (125)^{672}$

$2^{6724} = 2^{2018} \cdot 2^5 \cdot (2^4)^{672} = 2^{2018} \cdot 32 \cdot (128)^{672} > 10^{2018}$.

• Сумма нечётного кол-ва* простых чисел чётна, т.к. 1-ое число $= 2$, а все ост-е нечётны и сумма 2 и нечётное-1 = чётного числа нечётных чисел чётна.

• Сумма чётного $(\neq 0)$ кол-ва простых чисел нечётна. (Аналогично предыд-щему).

Найдется $n = 2^k$, такое, что $n > 10^{2018}$

и ближайшее простое к n число, которое меньше n имеет чётный номер. (Если пронумеровать простые числа, начиная с 2: $p_1 = 2, p_2 = 3 \ldots$).

Тогда сумма всех простых чисел, меньших n, является суммой чётного кол-ва простых чисел и она нечётна $\Rightarrow$ взаимно проста с $n = 2^k$.

* последовательных, начиная с 2

Возьмём $n=2^i$, где $i \in N$; $i \geq 6727$

Если ближ. к. n прост. число, кот. < n имеет нечётный номер, то $n=2^i$ соответствует усл-ю задачи.

Если же имеет нечётный номер, т.е кол-во

простых чисел, меньших 2^i нечётно, то

Возьмём число 2^{i+3}. Если простых чисел, меньших 2^{i+3} - нечётное кол-во, значит ~~отр~~ на отрезке $[2^i; 2^{i+3}]$ лежит чётное число простых чисел. (нечёт - нечёт = чёт)

Рассмотрим три отрезка $[2^i; 2^{i+1}]$; $[2^{i+1}; 2^{i+2}]$; $[2^{i+2}; 2^{i+3}]$

$= \frac{R_1^2+R_2^2}{2} + \alpha^2+\beta^2+\rho^2-R^2$ — const

$-kx_2^2+x_2(kx_B-x_A+\alpha k+\alpha)-\underbrace{\alpha(kx_B-x_A)}-$

$-ky_2^2+y_2(ky_B-y_A+\beta k+\beta)-\beta(ky_B-y_A)-$

$-kz_2^2+z_2(kz_B-z_A+\rho k+\rho)-\rho(kz_B-z_A)=$ const

$\cancel{-k(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+(x_2-\alpha)(kx_B}$

$\cancel{-kx_2^2+x_2(kx_B-x_A+\alpha k+\alpha)-ky_2^2+y_2(ky_B-y_A+\beta k+\beta)-}$

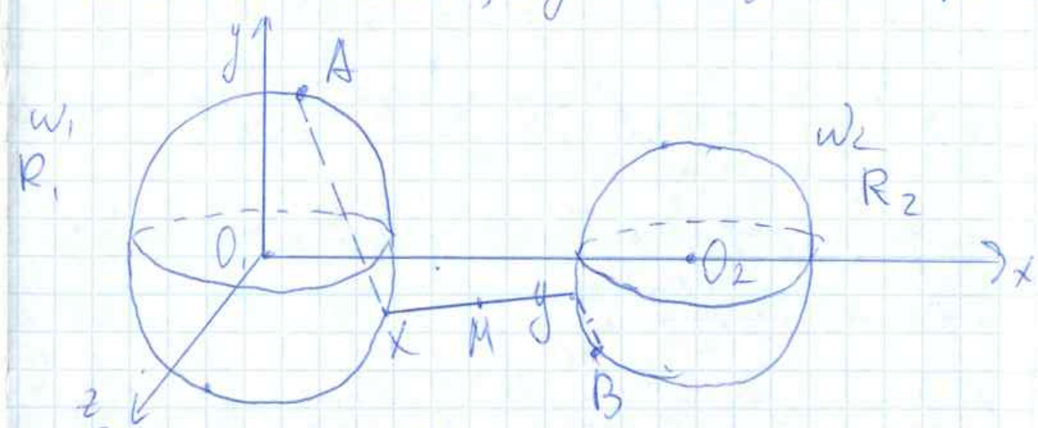
$\cancel{-kz_2^2+z_2(kz_B-z_A+\rho k+\rho)}$

Что верно при подстановке $k=$

$=\frac{x_1-x_A}{x_2-x_B}=\frac{y_1-y_A}{y_2-y_B}=\frac{z_1-z_A}{z_2-z_B}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Все перемекные точки M - середины отрезков XY - лежат на одной сфере

11.10) Введем ~~сист~~ прямоуг. сист. коорд. с нач. в т. O_1 - центр окр. ω_1 с осью $x^+ = O_1O_2$, где O_2 - центр окр ω_2



$O_1(0;0;0)$ $\quad O_2(x_0;0;0)$

$A(x_A;y_A;z_A)$ $\quad B(x_B;y_B;z_B)$

$X(x_1;y_1;z_1)$ $\quad Y(x_2;y_2;z_2)$

Ур-е сферы ω_1: $\quad$ Ур-е сферы ω_2:

$x^2+y^2+z^2=R_1^2$ $\quad (x-x_0)^2+y^2+z^2=R_2^2$.

$AX \parallel BY \Leftrightarrow \vec{AX}$ колл. $\vec{BY}$

$\vec{AX}(x_1-x_A; y_1-y_A; z_1-z_A)$ $\quad \vec{BY}(x_2-x_B; y_2-y_B; z_2-z_B)$.

$\vec{AX}$ колл $\vec{BY} \Leftrightarrow \frac{x_1-x_A}{x_2-x_B}=\frac{y_1-y_A}{y_2-y_B}=\frac{z_1-z_A}{z_2-z_B}=k$

$\cancel{M\text{ - сер } AX\left(\frac{x_1+x_A}{2};\frac{y_1+y_A}{2};\frac{z_1+z_A}{2}\right)}$ $\quad x_1=k\cdot x_2-k\cdot x_B+x_A$

$\cancel{M\text{ - сер } BY\left(\frac{x_2+x_B}{2};\frac{y_2+y_B}{2};\frac{z_2+z_B}{2}\right)}$. $\quad y_1=k\cdot y_2-k\cdot y_B+y_A$

Чтобы все переменные точки M и N лежали на сфере, должно выполняться

$$\begin{cases} \left(\frac{x_1+x_A}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{y_1+y_A}{2}-\beta\right)^2+\left(\frac{z_1+z_A}{2}-\gamma\right)^2=R^2 \\ \left(\frac{x_2+x_B}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{y_2+y_B}{2}-\beta\right)^2+\left(\frac{z_2+z_B}{2}-\gamma\right)^2=R^2 \end{cases}$$

где α, β, γ – коорд. центра O сферы и R – её радиус

$$\left(\frac{x_1+x_A}{2}\right)^2-\alpha(x_1+x_A)+\left(\frac{y_1+y_A}{2}\right)^2-\beta(y_1+y_A)+\left(\frac{z_1+z_A}{2}\right)^2-\gamma(z_1+z_A)=$$

$$=\left(\frac{x_2+x_B}{2}\right)^2-\alpha(x_2+x_B)+\left(\frac{y_2+y_B}{2}\right)^2-\beta(y_2+y_B)+\left(\frac{z_2+z_B}{2}\right)^2-\gamma(z_2+z_B)$$

$A, X \in \omega_1$

$$\frac{x_1^2+x_A^2}{2}+x_1x_A+\frac{y_1^2+y_A^2}{2}+y_1y_A+\frac{R_1^2-x_1^2-y_1^2+R_1^2-x_A^2-y_A^2}{2}+z_1z_A-$$

$$-\alpha(x_1+x_A-x_2-x_B)-\beta(y_1+y_A-y_2-y_B)-\gamma(z_1+z_A-z_2-z_B)=$$

$B, Y \in \omega_2$

$$=\frac{x_2^2+x_B^2}{2}+x_2x_B+\frac{y_2^2+y_B^2}{2}+y_2y_B+\frac{R_2^2-x_2^2-y_2^2+R_2^2-x_B^2-y_B^2}{2}+z_2z_B$$

$$x_1x_A+y_1y_A+z_1z_A+R_1^2=x_2x_B+y_2y_B+z_2z_B+R_2^2+$$

$$+\alpha(x_1+x_A-x_2-x_B)+\beta(y_1+y_A-y_2-y_B)+\gamma(z_1+z_A-z_2-z_B)$$

M – сер. XY $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Чтобы все переменные точки M лежали на сфере, должно выполняться

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\beta\right)^2+\left(\frac{z_1+z_2}{2}-\gamma\right)^2=R^2,$$ где

α, β, γ – коорд. O – центра этой сферы и R – её радиус

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+x_1x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2+\frac{y_1^2+y_2^2}{2}+y_1y_2-\beta(y_1+y_2)+\beta^2+$$

$$+\frac{z_1^2+z_2^2}{2}+z_1z_2-\gamma(z_1+z_2)+\gamma^2=R^2$$

$X \in \omega_1; Y \in \omega_2$

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{2}+\frac{R_1^2-x_1^2-y_1^2+R_2^2-x_2^2-y_2^2}{2}+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+$$

$$+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha(x_1+x_2)-\beta(y_1+y_2)-\gamma(z_1+z_2)=R^2$$

$$\underbrace{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2}_{const}=\alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2)+\gamma(z_1+z_2)-$$

$$-x_1x_2-y_1y_2-z_1z_2$$

$$\alpha(kx_2+x_2-kx_B+x_A)+\beta(ky_2+y_2-ky_B+y_A)+\gamma(kz_2+z_2-kz_B+z_A)-$$

$$-kx_2^2+kx_Bx_2-x_2x_A-ky_2^2+ky_By_2-y_2y_A-kz_2^2+kz_Bz_2-z_2z_A=$$