Шифр: А-17

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2017/2018
Ленинградская область

Район Бокситогорский

Школа МБОУ "СОШ №4" г. Пикалево им. А.П. Гумянцева

Класс 9

ФИО Федоров Михаил Алексеевич

9-8. Продолжение | Чистовик | A-17

5). Пусть $p \neq 2$ $q=2$ и третье хорошее число опять нечетное, тогда получатся при возведении в степень этого числа нечетные (пункт 4). $q=2$, два нечётных дадут чётное, но $p+q$ (при $q=2$) нечетное. Противоречие. Значит, и при таких условиях не будет третьего нечетного хорошего числа.

6). Пусть $p=2$ $q \neq 2$.. ~~Неважна чётность нового хорошего числа~~. Пусть это число чётное (кроме 2) рассмотрим:

$$p+q=\sum_1^q n^k$$

$$2+q=\sum_1^q n^k$$

$$2=\sum_1^q (n^k-1)$$

n^k-1 - либо 0, либо нечетное число, а т.к. q - нечетное, тогда и ответ будет нечетным, но он равняется 2. Противоречие...

Пусть теперь число будет нечетным. Оно не должно равняться 3, т.к. принимается вид $p+1$. Значит, это числа либо 5, либо больше 5.

$$2=\sum_1^q (n^k-1)$$

Опять n^k-1 - либо 0 либо ≥ 4.

Сумма чисел больше или равных 4 равняется 2. Противоречие...

7). $p \neq 2$ $q=2$ число чётное.

$$p+q=\sum^q n^k$$

$$p+2=\sum^2 n^k$$

$p+2$ - нечетное

$\sum^2 n^k$ - нечетное только если одна степень равна 0.

$$p+1=n^k$$

Получается, что $n^k=p+1$, а $p+1$ уже известно хорошее число.

8) Остается доказать нужное утверждение для четного третьего хорошего числа при $p \neq 2, q \neq 2$. При таком раскладе ~~$p+1$ четное~~ мы уже имеем два четных хороших числа ($p+1$ и 2).

6	7	8	9	10	Σ
7	7	2	–	1	17

9.7. Начало

I „Если существует всего два хороших числа".

1). $p+q=(p+1)+(q-1)=(p+1)+\sum\limits_{1}^{q-1}1=(p+1)^1+\sum\limits_{1}^{q-1}(p+1)^0$

Т.к. $\exists$ простых бесконечное количество (что доказал Евклид), то чисел $p+1$ тоже бесконечно, т.е общее число хороших чисел бесконечно.

II. „Если существует два хороших числа на конкретную пару p, q".

1). Одно хорошее число всегда будет $p+1$. (пункт I).

2). Если $q>2$, тогда второе число будет 2.

3). Ситуация, когда $q=2$:

$p+q=\sum\limits_{1}^{q}2^k$

$p+2=2^{k_1}+2^{k_2}$

p - нечетное, т.к. простое и отличное от q ($q=2$). Значит, $p+2$ - нечетное $\Rightarrow 2^{k_1}+2^{k_2}$ - нечетное. Следовательно, $p+2=2^{k_1}+2^0$, т.к. только так с помощью степени двойки можно получить нечетное число.

$p+2=2^{k_1}+2^0$

$p+2=2^{k_1}+1$

$p+1=2^{k_1}$

Значит, если $q=2$, то ~~хорошими числами будет только~~ ~~р+1.~~ двойка будет хорошим числом, если $p+1$ - степень двойки.

4). Докажем пункт II. 2. Пусть $p\neq 2$, $q\neq 2$, тогда предположим, что есть третье хорошее число, и оно нечетное. Нечетное число в любой целой степени больше нуля будет нечетным, а результат должен быть чётным, т.к. $p+q$ - чётное, т.е. слагаемых чётное количество - это q, но q простое число не равно двойке. Противорение. Значит третьего хорошего нечетного числа при $p\neq 2$, $q\neq 2$ не может быть.

Чистовик	А-17	6	7	8	9	10	Σ
					x		

9.6.

1) Найдём первое число. Оно не должно содержать нулей, т.к. ~~что~~ сумма цифр не увеличивается, а само число становится больше. Также данное число должно состоять почти полностью из девяток, т.к. девять самая большая цифра. ~~(число~~

2). Разделим 2018 на 9:

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 9 \\ \underline{18} & \overline{224} \\ 21 & \\ \underline{18} & \\ 38 & \\ \underline{36} & \\ 2 & \end{array}$$

; $\frac{2018}{9} = 224\frac{2}{9}$

3). Первое число — 2999999999...999 (девяток 224 штуки).

4). Найдём алгоритм создания последующих чисел:

1) 2999999999...999

2). 3899999999...999 или 3989999999...999

Первое число меньше, значит, оно следующее.

2) 3899999999...999

3) 4799999999...999 или 4889999999...999 или 3989999999...999

Последнее число меньше, значит, оно следующее.

Получили алгоритм, когда девятка ~~от~~, находящаяся после 8, отдают единицу этой восьмерки.

5).
1 - 2999999999...999
2 - 3899999999...999
3 - 3989999999...999
4 - 3998999999...999
~~...999~~

...

225 - 3999999999...998

а) Сравним эти числа с числом 3999999...999 (224 девятки).

б) До данного числа нашим числам не хватает единицы. Причем недостающая единица находится на ~~то~~ месте, которое равняется порядковому номеру числа. Значит, 225-ое число будет иметь недостающую единицу на 225-ом месте (т.к. цифр в числах 225 — 224 девятки и остаток от деления).

6). Нужное число - 39999999999...998 (223 девятки)

(или $3\cdot10^{224}+9\cdot\sum\limits_{a=1}^{223}10^{a}+8$)

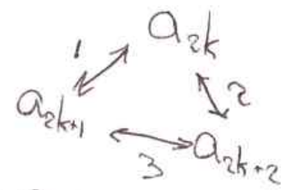
Ответ: 3999999999...9998 (223 девятки) $\left(3\cdot10^{224}+9\sum\limits_{a=1}^{223}10^{a}+8\right)$.

9.10.

a_1 - первый ребенок
a_2 - второй ребёнок
a_3 - третий ребёнок
...
a_{100} - сотый ребенок

1). Выделим a_1, образуем группы a_{2k}, a_{2k+1} и a_{2k+2}

2). По условию, групп 33, дружат там взаимно и попарно, т.е. в каждой группе 3 дружащих пары.



3). $33\cdot3=99$ 99 дружащих пар. (~~в группах~~ среди групп).

4) Если выделить a_n $(n\neq1)$, то группы будут точно такими же, кроме группы, из которой „ушёл" a_n. На его место придёт a_1 и образует новые две пары. Но из одной группы в разных вариациях могут „выходить" разные дети, т.е a_1 должен иметь с каждой группой 3 пары (т.к. в группе три участника).
$33\cdot3=99$ 99 дружащих пары (у a_1)

5). Складываем: $99+99=198$
198 пар (всего).

Ответ: 198 пар наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

1	2	3	4	5	ΣΣ
7	3	0	–	–	10

A-17

9.3

Дано:

ABCD - параллелограмм

AE = DE

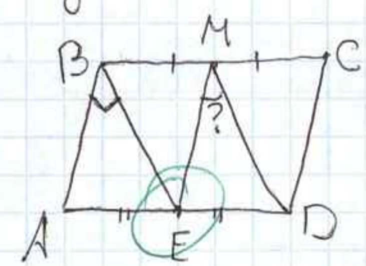
∠ABE = 90°

M - середина BC

∠DME - ?

Решение:

1). Пусть точка E находится бесконечно близко к стороне AD, тогда:



2). ABCD - параллелограмм ⇒

⇒ BC = AD

M - середина BC ⇒ BM = MC

AE = DE

⇒ BM = MC = ~~⋆~~ AE = ED ⇒ ME ∥ AB ∥ CD

3). ~~AB∥CD~~ ∠ABE = ∠BEM, т.к. накрест лежащие

4). AB = CD; ME ∥ AB ∥ CD; BC ∥ AD ⇒ BE ∥ MD

5). ∠BEM = ∠DME, т.к. накрест лежащ.

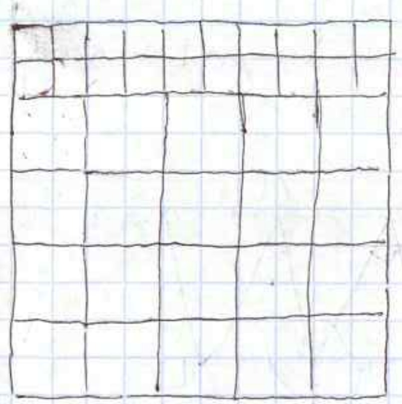
A-17

6). $\angle ABE = \angle BEM$, $\angle BEM = \angle DME$ $\Rightarrow$ $\angle ABE = \angle DME$

7). $\angle ABE = 90^\circ \Rightarrow \angle DME = 90^\circ$

Ответ: $\angle DME = 90^\circ$

9.1



Чтобы построить квадрат, который будет разделён квадратиками со стороной равной степени двойки, надо просуммировать $2^{(n+1)(b-a)}$, где n - сторона ~~маленького~~ квадратика, b - сторона наибольшего квадратика, a - сторона наименьшего квадратика, и тогда получится сторона нужного квадрата.

Пример: пусть большой квадрат состоит из квадратиков со стороной 2, 4, 8.

$2=2^1 \quad 4=2^2 \quad 8=2^3$

$b=3 \quad a=1 \quad b-a=2$

$2^{(1+1)(3-1)}+2^{(2+1)(3-1)}+2^{(3+1)(3-1)}=$

$=2^{2\cdot 2}+2^{3\cdot 2}+2^{4\cdot 2}=$

$=2^4+2^6+2^8=$

$=16+64+256=$

$=\cancel{2}\ 336$

336 - сторона нужного большого квадрата.
Если среди маленьких квадратиков есть квадратик с нечетной стороной, тогда сторона большого квадрата будет равняться $2\sum x_n^2$, где x_n - сторона одного из маленьких квадратиков.

A-17

9.2.

$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \alpha_5$

3б.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_5 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_2+\alpha_4+\alpha_5 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 \vdots \alpha_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_5-\alpha_4 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_5-\cancel{3}\alpha_3 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_5-\alpha_2 \vdots \alpha_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_4-\alpha_5 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_3-\alpha_5 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_2-\alpha_5 \vdots \alpha_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_3+\alpha_4 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_2+\alpha_4 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_2+\alpha_3 \vdots \alpha_1 \end{array}$$

?

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \vdots \alpha_1 \\ \alpha_3+\alpha_4 \vdots \alpha_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_2 \vdots \alpha_1$$

$\alpha_2 \vdots \alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 \vdots \alpha_1; \alpha_4 \vdots \alpha_1; \alpha_5 \vdots \alpha_1$

Аналогично с другими числами.

Получается, что каждое число делит каждое, т.е они между собой равны.

Ответ: среди этих чисел обязательно найдутся четыре равных.