Шифр: Д-5

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2017/2018
Ленинградская область

Район Сосновый Бор

Школа МБОУ „Лицей" №8

Класс 9

ФИО Чекаль Михаил Владимирович

A – 5.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	2	X	1	17

Чистовик. А-5

1. Найдём сначала наименьшее подходящее нам число. ~~Это~~ Т.к. $2018 : 9 = 224{,}22\ldots$, то в этом числе будет 225 знаков.

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 9 \\ \underline{18} & 224{,}22\ldots \\ 21 & \\ \underline{18} & \\ 38 & \\ \underline{36} & \\ 20 & \end{array}$$

Вот оно: $2\underbrace{999\ldots999}_{224\text{ знака}}$

Тогда следующим подходящим числом будет $38\underbrace{999\ldots999}_{223\text{ знака}}$.
Очевидно, что каждое следующее число будет получаться смещением восьмёрки на одну цифру вправо:

$39\underbrace{8999\ldots999}_{225\text{ знака}}$, $399899\ldots99$ и т.д. Всего таких чисел будет 233. Вместе с числом $2999\ldots999$ и $38999\ldots999$ всего будет 225 чисел. Значит, 225-ым числом будет число $3999\ldots998$, т.е. состоящее из тройки, 223 девяток и восьмёрки.

Ответ: число $3\underbrace{999\ldots998}_{224\text{ знака}}$.

Нет, нельзя.
2. ~~Да, можно.~~ Для начала будем менять местами синие и зелёные фишки. Это сделать, очевидно, несложно. Таким образом мы получаем 20 зелёных и 20 синих чередующихся между собой фишек и ещё 20 синих фишек позади (подряд). Затем красные фишки продвигаем, меняя местами с синими вплоть до зелёных. У нас остаётся ещё 8 красных фишек, которые мы сдвинуть никуда не можем. Это можно представить и проще. Т.к. красную фишку невозможно поместить между зелёными (можно только вплотную) ~~а синих фишек меньше~~ а синих фишек меньше 48 (т.к. 2 кр. фишки стоят вплотную к зелёным, нам потребовалось бы $50-2=48$ фишек синего цвета), то часть красных фишек (или зелёных, смотря с чего начинать) будет стоять подряд.

Ответ: нет, нельзя.

3. Запишем условие в таком виде, причём любые k могут быть равными или различными:
$p+q = \underbrace{n^{k_1}+n^{k_2}+\ldots+n^{k_q}}_{q \text{ раз}}$. Поскольку p и q — простые числа, то, представив равенство в виде $p = \underbrace{n^{k_1}+n^{k_2}+\ldots+n^{k_q}}_{q \text{ раз}} - q$, мы получаем, что сумма $\underbrace{n^{k_1}+n^{k_2}+\ldots+n^{k_q}}_{q \text{ раз}}$ всегда чётна, кроме того случая, когда $p=2$ или $q=2$.

Кроме того, ясно, что $p+q = (p+q)-q+1+\underbrace{n^0+\ldots+n^0}_{q-1 \text{ раз}}$, или $p+q = p+1+\underbrace{n^0+\ldots+n^0}_{q-1 \text{ раз}}$. Таким образом, число $p+1$ является n^k, где $k \geq 1$.

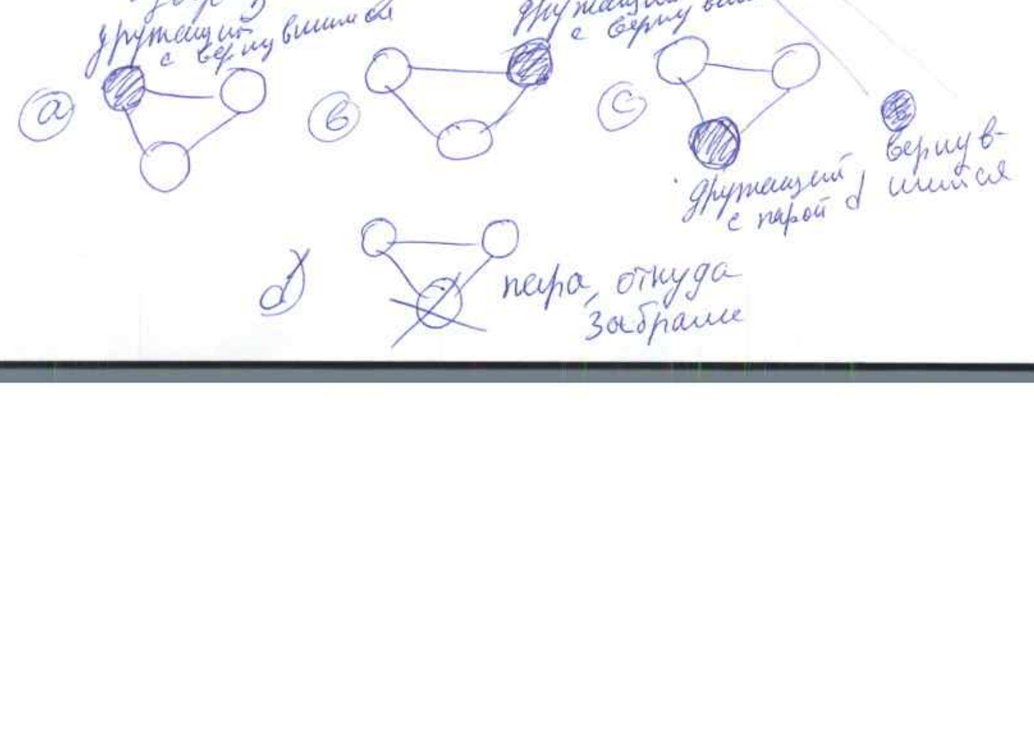
Например, так можно разложить число 12 ($12=5+7$):
$12 = \underbrace{8^1+8^0+8^0+8^0+8^0}_{q=5}$ или $12 = \underbrace{2^2+2^2+2^2+2^1+2^1}_{q=5}$. Из другого примера ($16=5+11$) получаем, что 2 «хорошие» числа существуют, если либо $p+q$ — степень меньшего, либо большее из них — степень меньшего числа.

5. Парой дружащих детей обозначают двух детей, которые дружат между собой. Поскольку в 33 группах по 3 человека все трое попарно дружат, то таких пар точно не менее $33 \cdot 3 = 99$. Представим теперь, что выделенного ребёнка возвращают и забирают взамен другого. Тогда в п-ной тройке остаётся только два ребёнка. Возможны два случая:

1) Вернувшийся ребёнок приходит в ту пару, откуда только что забрали ребёнка.
Этот случай нас не интересует, т.к. предполагает дружбу в принципе всех со всеми.

2) Вернувшийся ищет такую пару, где
а) Он дружит как минимум с двумя детьми
б) Третий дружит с теми двумя из группы, которых только что забрали третьего ребёнка.

Изобразим дальнейшие действия:



~~5 (продолжение)~~ Чистовик.

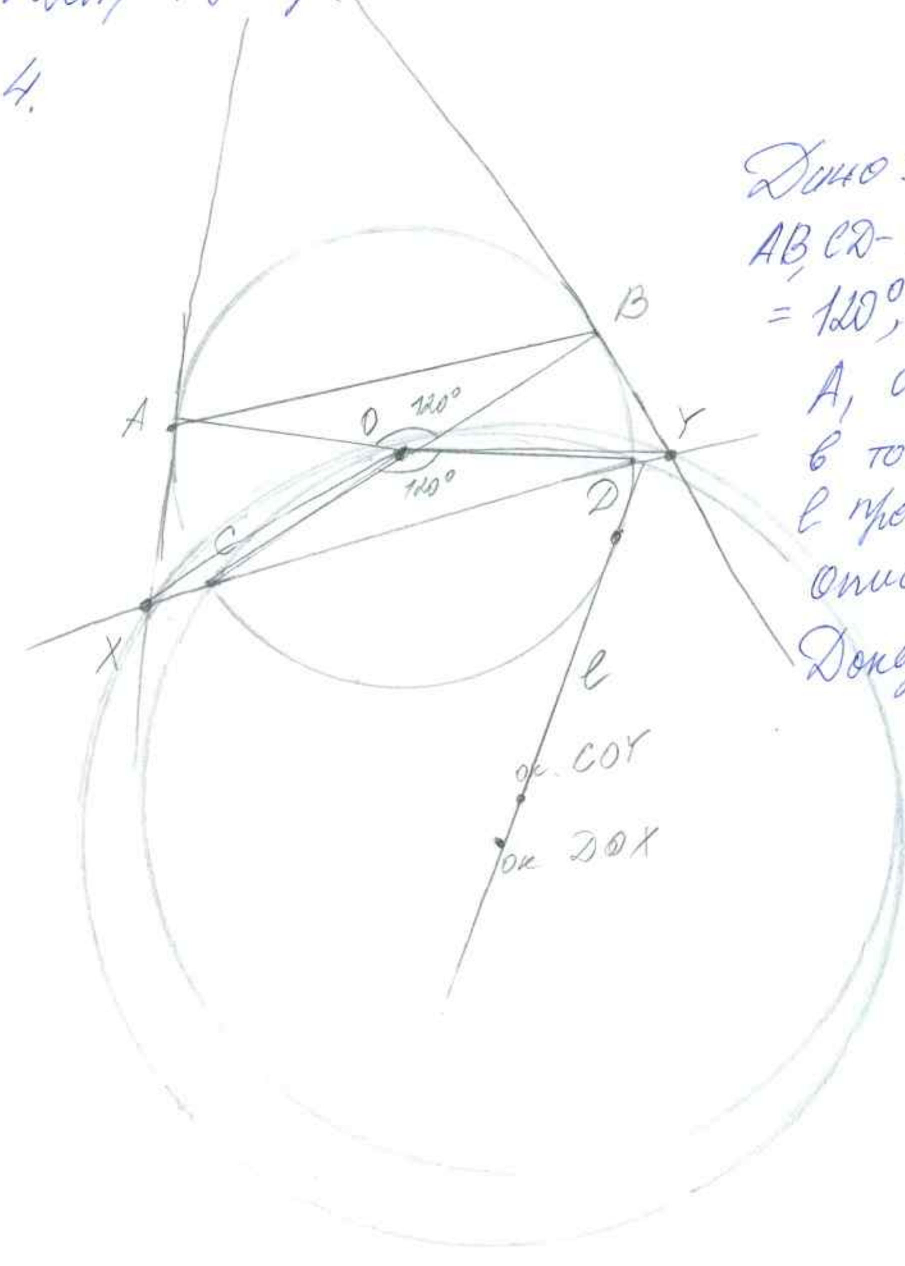
~~Когда вернувшийся образует тройку с дружащими с ним, это добавляет ещё 3 пары; дружащий с парой 4 добавляет ещё 2 пары. Остаются 3 пары, которые должны объединиться в тройки. Это добавляет нам ещё 4 пары. Итого пар~~

6 ?

~~$99+2+4+3=99+9=108$ (пар)~~

~~Ответ: 108 пар.~~

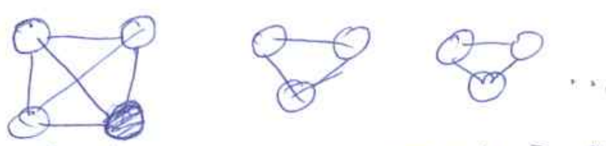
№4.



Дано: ω — окружность, O — её центр, AB, CD — хорды окр. ω, $\angle AOB = \angle COD = 120°$, a — касательная в точке A, $a \cap CD = X$, b — касательная в точке B, $b \cap DC = Y$, l проходит через центры окр-стей, описанных около ΔDOX и ΔCOY.

Доказать: l касается ω.

5. Т.к. всего образуется 33 ~~пары~~ группы по 3 человека, то пар не менее $33 \cdot 3 = 99$. Пусть мы не будем выделять сотого человека. Тогда он может либо образовать четвёрку, либо не дружит ни с одной тройкой. Во втором случае условие, естественно, не соблюдается, поэтому ~~нельз~~ его отбрасываем. Рассмотрим 1-ый случай.



Очевидно, что этот сотый человек добавит ещё 3 связи, так что пар ~~их~~ не менее 102. Теперь рассмотрим случай, когда забирают кого-либо из тройки (в случае, если забирают из четвёрки ничего интересного не происходит). Тогда мы получаем 31 тройку, 1 четвёрку и 1 двойку. Очевидно, кто-то из четвёрки должен дружить вообще со всеми остальными, либо каждый из этой четвёрки должен дружить с опр. количеством детей, что нас также не интересует. Итак, всего пар получается ~~$99+(99-1)=197$~~ $99+3+32 \cdot 3 = 102+96 = 198$. Таким образом, если забирают кого-то из четвёрки, то ничего не меняется, а если кого-то из любой тройки, то туда становится человек, который дружит со всеми.

Ответ: 198 пар.

3. (Продолжение). Таким образом, если бы существовало некоторое третье хорошее число, оно соответствовало бы корню нек-рой степени k либо из $(p+q)$, либо из $(p+1)$. Но при этом ~~о~~ это третье n, как и второе, должно быть простым числом (в случае $p+q=12$ и $p+q=16$ и $p+q=8$ это число 2). Но тогда получается, что два этих n являются корнем одной степени из одного и того же числа, значит, они равны. Отсюда следует, что существует только два или менее „хороших" числа, ч.т.д.

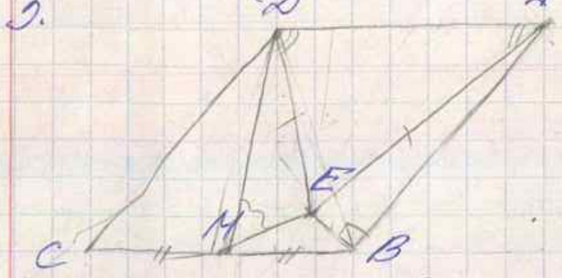
A-5

1	2	3	4	5	Σ
7	0	0	0	0	7

1. Пусть мы хотим получить квадрат, разбитый на квадраты трёх видов; назовём их стороны a, b и c, а кол-во квадратов каждого вида k. Пусть сторона всего большого квадрата равна x. Тогда имеем равенство: $(a^2+b^2+c^2)\cdot k = x^2$
Пусть $a=1$, $b=2$, $c=3$. Тогда $14k = x^2$.
Пусть тогда $k=14$, т.е. у нас будет по 14 квадратов каждого размера, $x=14$.

В данном квадрате по 14 квадратов со сторонами 3, 2 и 1. Этот квадрат является наименьшим из возможных, т.к. в случае с двумя квадратами разного размера задача не решается (для общего квадрата меньшего чем этот).

3.



Дано: ABCD - параллелограмм, AE = DE, $\angle ABE = 90^\circ$, BM = CM.

Найти: $\angle DME$.

Решение.

Т.с. DE = AE, $\angle EDA = \angle EAD$.

$\triangle$

Ответ: 30°.

A-5

2.

Пусть у нас три числа одинаковы и равны a, а ещё два - равны b.

Тогда по условию: $(a+a+a) \vdots b$

$(a+a+b) \vdots a, b$

$(a+b+b) \vdots a$

Откуда следует, что $3a \vdots b$, $2a+b \vdots a, b$ и $2b+a \vdots a$, то есть $3a \vdots b$, $2a \vdots b$ и $b \vdots a$.

Но т.к. $3a \vdots b$ и $2a \vdots b$ следует, что $a \vdots b$, а т.к. $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то $a=b$, т.е. такой случай невозможен.

Очевидно, что во всех случаях, где присутствует более чем 2 различных числа, условия задачи не выполняются, поэтому среди этих чисел всегда найдутся 4 одинаковых (например, 2 2 2 2 6).

4. Если бы каждый ученик получил конфеты всех сортов, то никакого ограничения бы не было. Но из второго условия следует, что

это не так. ~~Из 2го условия следует, что~~

5. $x^2+y^2+z^2=1$

Доказать: $(x-y)(y-z)(x-z)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$, или

что $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$